

# Notas em Percolação

Luiz Renato G. Fontes  
Instituto de Matemática e Estatística — USP

# Prefácio

Dos modelos da física estatística na rede a exibir transição de fase, o modelo de Percolação é possivelmente o mais simples e um dos que mais bem exemplificam a rica e frutífera interrelação que há na área entre métodos da física matemática, probabilidade e combinatória.

Formulado em fins da década de 50 por Broadbent e Hammersley [1] como um modelo de transporte de fluido em meio poroso, ele teve seus primeiros resultados não-triviais (sobre a existência de transição de fase) provados por estes autores. Harris [2] obteve resultados parciais sobre o ponto crítico em duas dimensões no início dos anos 60. Mais tarde, já em fins dos anos 70 e início dos 80, Kesten [3] estabeleceu seu valor exato. Diversos outros resultados importantes foram obtidos neste último período, como os argumentos independentes de Menshikov [4] e Aizenman e Barsky [5] para estabelecer a unicidade do ponto crítico e o resultado de Aizenman, Kesten e Newman sobre a unicidade do aglomerado infinito [6].

Os fins dos anos 80 e início dos 90 marcam o ataque a um dos problemas mais elusivos do modelo, a continuidade da densidade do aglomerado infinito no ponto crítico em mais do que duas dimensões. Idéias de renormalização de Barsky, Grimmett e Newman [7] produziram os resultados mais importantes a respeito, ainda que incompletos (o problema original permanece em aberto!).

Estas notas representam tópicos apresentados pelo autor em cursos sobre Percolação na USP de São Carlos e São Paulo, na UFMG e no IMPA entre janeiro de 1993 e fevereiro de 1994. Os pontos abordados são basicamente os delineados acima. As fontes são o livro já bastante aclamado *Percolation* de

G.R. Grimmett [8], que serve de referência para tudo aqui e muito mais, e também notas de aulas tomadas de C.M. Newman na NYU em 1990. Supõe-se um conhecimento de teoria da probabilidade a nível de graduação. Alguns resultados mais avançados (mas clássicos) desta teoria são citados, para os quais indicamos, por exemplo, Breiman [9] como referência.

Agradeço o coleguismo e amizade dos mentores dos cursos que mencionei, Cláudio Paiva, Gastão Braga e Maria Eulália Vares. Agradecimentos especiais a esta última pela iniciativa de sugerir e organizar a edição destas notas junto ao IMPA/CNPq.

julho de 1996

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	O Modelo . . . . .	1
1.2	Primeiros Resultados . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ferramentas úteis</b>	<b>13</b>
2.1	Desigualdade de FKG . . . . .	13
2.2	Desigualdade de BK . . . . .	16
2.3	Fórmula de Russo . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Fase Subcrítica: Decaimento Exponencial</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Fase Supercrítica: Unicidade do Aglomerado Infinito</b>	<b>35</b>
<b>5</b>	<b>O Modelo em 2 Dimensões: Dualidade</b>	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>Continuidade no Ponto Crítico: Renormalização</b>	<b>55</b>
<b>A</b>	<b>Prova a um lema do Capítulo 3</b>	<b>59</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Percolação é o fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. Por exemplo, óleo ou gás através da rocha ou água através de pó de café. O meio é constituído de poros e canais microscópicos por onde passaria o fluido. Numa situação simples, cada canal pode estar aberto ou fechado à passagem do fluido, dependendo de diversas características que poderiam ser resumidas num parâmetro. A distribuição de canais abertos e fechados poderia ser descrita probabilisticamente. No caso mais simples, cada canal, independentemente dos demais, está aberto com probabilidade  $p$ , o parâmetro do modelo, e fechado com a probabilidade complementar. Vamos modelar o meio microscopicamente pelo reticulado hipercúbico  $d$ -dimensional, os sítios do reticulado representando os poros e os elos representando os canais. Este, o que chamaremos de *modelo de percolação de elos independentes (em  $\mathbb{Z}^d$ )*, será o objeto do nosso estudo. A questão básica é a ocorrência ou não de *percolação*, isto é, a existência de um caminho infinito de elos abertos atravessando o meio. A seguir, introduziremos o modelo em detalhe (na próxima seção) e mostraremos (na seção seguinte) seu primeiro resultado não-trivial, aquele que estabelece a transição de fase em duas ou mais dimensões, isto é, a existência de um valor crítico não-trivial para o parâmetro  $p$ , abaixo do qual o modelo não exhibe percolação e acima do qual esta passa a ocorrer.

### 1.1 O Modelo

Considere a rede hipercúbica em  $d$  dimensões  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  (denotada por um abuso de linguagem costumeiro por  $\mathbb{Z}^d$ ), onde  $\mathbb{Z}^d$  é o conjunto de sítios da

rede e  $\mathcal{IE}^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_1 = 1\}$  é o seu conjunto de elos (vizinhos mais próximos).

A cada elo de  $\mathcal{IE}^d$  será atribuído aleatoriamente o status *aberto* ou *fechado* da seguinte maneira. Seja  $\mathcal{X} := \{X_e, e \in \mathcal{IE}^d\}$  uma família de variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição comum *de Bernoulli* com parâmetro  $p$ , isto é,

$$P_p(X_e = 1) = 1 - P_p(X_e = 0) = p$$

para todo  $e \in \mathcal{IE}^d$ , onde  $p$  é um número real entre 0 e 1 e  $P_p$  é a probabilidade associada a  $\mathcal{X}$  (algumas vezes denotada  $P_{p,d}$ ). A esperança com respeito a esta probabilidade será denotado por  $E_p$ .

Mais formalmente, o espaço amostral do modelo será dado por  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{IE}^d}$ . A  $\sigma$ -álgebra é a usual, denotada por  $\mathcal{E}$ , gerada pelos eventos cilíndricos, isto é, aqueles que dependem de elos em subconjuntos finitos de  $\mathcal{IE}^d$  apenas. A probabilidade  $P_p$  é a probabilidade produto em  $\Omega$  atribuindo peso  $p$  a 1's e  $1 - p$  a 0's.  $X_e$  é a projeção na coordenada  $e$ , isto é,

$$X_e(\omega) = \omega_e$$

para todo  $\omega \in \Omega$ .

$X_e = 1$  indica que o elo  $e$  está aberto e  $X_e = 0$  indica que  $e$  está fechado.

Um conjunto de elos de  $\mathcal{IE}^d$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $n \geq 1$ , onde  $e_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , será dito um *caminho* se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  forem distintos e  $y_i = x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  (não há *loops*). Um caminho será dito *aberto* se todos os seus elos estiverem abertos (isto é, se  $X_{e_i} = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Diremos que dois sítios da rede,  $x$  e  $y$ , estão *conectados* (notação:  $x \leftrightarrow y$ ) se existir um caminho aberto  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  com  $x_1 = x$  e  $y_n = y$ . Vê-se que a conectividade é uma relação de equivalência e às classes de equivalência em que se dividem os sítios chamaremos *aglomerados* (ou a expressão em inglês *clusters*). Denotaremos por  $C_x$  o aglomerado do sítio  $x$  e por  $C$  o aglomerado da origem, objeto básico de nosso estudo.

Estaremos interessados inicialmente em  $|C|$ , o volume (ou cardinalidade) do aglomerado da origem, mais precisamente em sua distribuição (que, note-se, é a mesma que a de  $|C_x|$  para todo sítio  $x$ , pela invariância por translação de  $P_p$ ). Especificamente, queremos saber se aglomerados infinitos podem ocorrer (com probabilidade positiva).

Em dimensão 1, o problema é trivial, pois, denotando por  $C_-$  e  $C_+$  os sítios de  $C$  à esquerda e à direita da origem, respectivamente, temos que  $|C_-|$

e  $|C_+|$  são v.a.'s i.i.d. com  $P_p(|C_+| \geq k) = p^k$ . Logo, não há aglomerados infinitos quase-certamente em dimensão 1 se  $p < 1$ . Restringiremo-nos pois a  $d \geq 2$ .

$|C|$  é uma v.a. que pode assumir os valores  $1, 2, \dots, \infty$ . Uma quantidade de interesse será

$$\theta(p) := P_p(|C| = \infty).$$

Podemos então escrever

$$\theta(p) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_p(|C| = k).$$

Expressões para  $P_p(|C| = k)$  são relativamente simples de calcular para  $k$  pequeno, mas se tornam combinatorialmente crescentemente complicadas para  $k$  crescente e não há uma forma explícita para  $k$  genérico. O estudo de  $\theta(p)$  deve seguir uma outra abordagem.

Na próxima seção, provaremos o resultado principal deste capítulo, o primeiro não-trivial da teoria, aquele que estabelece a existência de transição de fase no modelo de percolação em 2 ou mais dimensões, como enunciado em seguida.

**Teorema 1.1.1** *Para  $d \geq 2$ , existe um valor crítico do parâmetro  $p$ , denominado  $p_c$ , no intervalo aberto  $(0, 1)$  tal que*

$$\begin{aligned} \theta(p) &= 0, & \text{se } p < p_c \\ \theta(p) &> 0, & \text{se } p > p_c. \end{aligned}$$

Resultados subseqüentes, de que nos ocuparemos em capítulos seguintes, procuram caracterizar as diversas fases do modelo: a *fase subcrítica* ( $p < p_c$ ), a *fase supercrítica* ( $p > p_c$ ) e a *fase crítica* ( $p = p_c$ ).

## 1.2 Primeiros Resultados

Em auxílio à prova do Teorema 1.1.1, vamos discutir propriedades de monotonicidade da função  $\theta(p)$ . Para isto, construiremos um modelo probabilístico em que os modelos de percolação com os diversos valores de  $p$  possíveis estão



acoplados. Esta construção, a que chamaremos de *modelo padrão*, será útil também em outros casos.

Seja  $\mathcal{Z} := \{Z_e, e \in \mathbb{E}^d\}$  uma família de v.a.'s i.i.d. com distribuição comum uniforme em  $[0, 1]$ .  $\mathbf{P}$  denotará a probabilidade neste modelo.

Um elo  $e$  da rede será dito  *$p$ -aberto* se

$$Z_e < p$$

e  *$p$ -fechado* caso contrário. Podemos então construir o modelo de percolação com parâmetro  $p$  usando elos  $p$ -abertos e  $p$ -fechados deste modelo, da mesma forma como na seção anterior.

**Lema 1.2.1**  $\theta(p)$  é não-decrescente em  $p$ .

### Prova

Seja  $C_p$  o aglomerado da origem no modelo acima (com a conectividade através de elos  $p$ -abertos). Temos que

$$\theta(p) = \mathbf{P}(|C_p| = \infty).$$

Por outro lado,

$$C_p \subset C_{p'}$$

quando  $p < p'$ , pois neste caso um elo  $p$ -aberto está necessariamente  $p'$ -aberto. Concluimos que

$$\theta(p) = \mathbf{P}(|C_p| = \infty) \leq \mathbf{P}(|C_{p'}| = \infty) = \theta(p'). \quad \triangle$$

Para o próximo resultado, monotonicidade na dimensão, notemos que podemos construir o modelo de percolação em  $d$  dimensões num hiperplano  $d$ -dimensional da rede  $d + 1$ -dimensional contendo a origem, declarando fechados os elos ligando o hiperplano ao restante do espaço e usando  $\mathcal{X}$  para os demais elos. Denotando por  $\tilde{C}$  o aglomerado da origem neste modelo, temos claramente que  $\tilde{C} \subset C$  e logo

$$\theta(p) := \theta(p, d) = P_{p, d+1}(|\tilde{C}| = \infty) \leq P_{p, d+1}(|C| = \infty) = \theta(p, d + 1).$$

Isto prova o seguinte.

**Lema 1.2.2**  $\theta(p, d)$  é não-decrescente em  $d$ .

Pelos dois lemas acima, torna-se suficiente, para provarmos o Teorema 1.1.1, mostrarmos os seguintes resultados.

**Proposição 1.2.1** Para  $d \geq 2$  e  $p$  suficientemente próximo de 0

$$\theta(p) = 0.$$

**Proposição 1.2.2** Para  $d = 2$  e  $p$  suficientemente próximo de 1

$$\theta(p) > 0.$$

Como veremos nas demonstrações destes resultados, abaixo, é suficiente no primeiro tomarmos  $p < 1/(2d - 1)$  e no segundo  $p > 2/3$ .

**Prova da Proposição 1.2.1**

É suficiente mostrar que  $\chi_p := E_p|C| < \infty$  para  $p$  próximo de 0.

Podemos escrever

$$|C| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{I}_{\{0 \leftrightarrow x\}},$$

onde  $\mathbf{I}_{\{\cdot\}}$  é a função indicadora, isto é,

$$\mathbf{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e logo

$$\chi_p = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p(0 \leftrightarrow x). \quad (1.2.1)$$

Podemos reescrever a probabilidade acima como  $P_p(\cup_\gamma \{\gamma \text{ está aberto}\})$ , onde a união é sobre caminhos conectando 0 a  $x$ . Temos então de (1.2.1) e a subaditividade que

$$\chi_p \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ está aberto}),$$

onde a segunda soma é sobre os caminhos  $\gamma$  conectando 0 a  $x$ . A dupla soma pode ser então reordenada em

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{|\gamma|=n} P_p(\gamma \text{ está aberto}),$$

onde a segunda soma é sobre os caminhos  $\gamma$  partindo da origem e de comprimento  $n$  (isto é, caminhos  $\gamma = \{e_1, \dots, e_n\}$  em que  $x_1 = 0$ ). A probabilidade acima vale  $p^n$  independentemente de  $\gamma$ . Portanto temos que

$$\chi_p = \sum_{n \geq 0} \sigma(n) p^n, \quad (1.2.2)$$

onde  $\sigma(n)$  denota o número de caminhos partindo da origem e de comprimento  $n$ .

Um argumento combinatório simples revela que, para  $n \geq 1$ ,

$$\sigma(n) \leq 2d(2d-1)^{n-1}.$$

De fato, o primeiro passo do caminho tem  $2d$  possíveis sítios de destino, enquanto que a partir do segundo até o final, cada passo tem *no máximo*  $2d-1$  possíveis sítios de destino (devido à ausência de *loops*). Temos

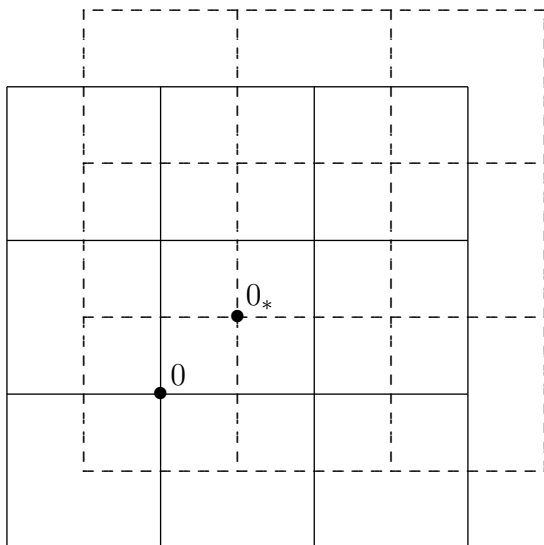
$$\chi_p \leq \sum_{n \geq 1} 2dp[(2d-1)p]^{n-1} + 1$$

e para a série ser convergente, basta termos  $p < 1/(2d-1)$ .  $\triangle$

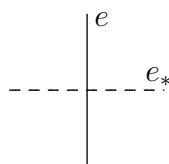
**Prova da Proposição 1.2.2** Consideremos a rede bidimensional dual de  $\mathbb{Z}^2$ ,

$$\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2).$$

$\mathbb{Z}_*^2$  é um deslocamento de  $\mathbb{Z}^2$  por  $1/2$  unidade em cada direção coordenada. Volumes finitos superpostos de  $\mathbb{Z}^2$  e  $\mathbb{Z}_*^2$  são ilustrados abaixo, o de  $\mathbb{Z}^2$  em linhas cheias, linhas tracejadas para  $\mathbb{Z}_*^2$ .



Notemos que há uma relação 1 a 1 entre os sítios e elos de  $\mathbb{Z}^2$  e aqueles de  $\mathbb{Z}_*^2$ . Seja a relação (1 a 1)  $e \rightarrow e_*$  entre elos de  $\mathbb{Z}^2$  e  $\mathbb{Z}_*^2$  que associa a cada elo da primeira rede o elo secante da rede dual, como na figura a seguir.

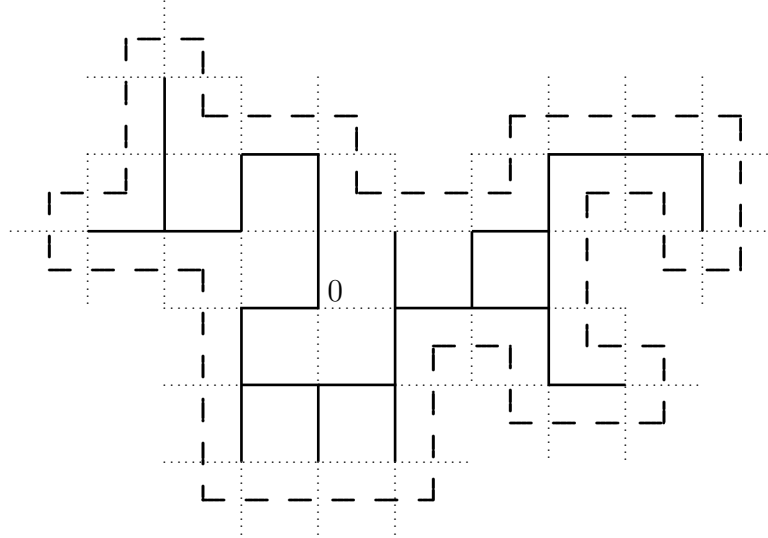


Definiremos um modelo de percolação em  $\mathbb{Z}_*^2$  induzido pelo modelo em  $\mathbb{Z}^2$  declarando  $e_*$  aberto ou fechado conforme  $e$  esteja aberto ou fechado, respectivamente.

No que se segue, um *circuito* será um caminho  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  tal que  $y_n = x_1$ , isto é, um caminho que se fecha sobre si mesmo.

A ocorrência de um aglomerado da origem finito em  $\mathbb{Z}^2$  está associada à existência de um circuito fechado (isto é, um circuito de elos fechados) na rede dual ao redor da origem. Isto se deve ao fato de que se o aglomerado da origem for finito, os elos da fronteira do aglomerado (isto é, elos ligando sítios do aglomerado a sítios fora do aglomerado), obviamente fechados, estão sempre dispostos de tal forma que os elos correspondentes do dual formam um circuito, que será então fechado. A figura a seguir ilustra este

fato geométrico elementar, bastante intuitivo (o aglomerado da origem aparece em linhas cheias, sua fronteira em linhas pontilhadas e o circuito no dual em linhas tracejadas) e, como a prova é longa e tediosa (vide [10] página 386 e a Proposição 5.1 na página 45 destas notas), não a apresentaremos neste texto.



Seguimos com a demonstração da Proposição 1.2.2.

Vamos mostrar que a probabilidade de o aglomerado da origem ser finito é estritamente menor do que 1 para  $p$  suficientemente próximo de 1. Para isto, em vista do fato geométrico acima, bastará argumentar que a probabilidade de haver algum circuito fechado na rede dual ao redor da origem é estritamente menor do que 1 para  $p$  suficientemente próximo de 1. O argumento é semelhante ao *argumento de Peierls* para demonstrar a ocorrência de magnetização no modelo de Ising.

$$P_p(\text{há um circuito fechado na rede dual ao redor da origem}) \leq \sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ está fechado}),$$

onde a soma é sobre todos os circuitos  $\gamma$  ao redor da origem. Ela pode ser reordenada da seguinte maneira

$$\sum_{n \geq 4} \sum_{|\gamma|=n} P_p(\gamma \text{ está fechado}),$$

onde a segunda soma é sobre circuitos  $\gamma$  ao redor da origem de comprimento  $n$ .

Está claro que a probabilidade no interior das somas depende apenas de  $n$  e vale  $(1 - p)^n$ . Portanto, a expressão acima fica

$$\sum_{n \geq 4} \lambda(n)(1 - p)^n,$$

onde  $\lambda(n)$  denota o número de circuitos na rede dual ao redor da origem de comprimento  $n$ .

O seguinte argumento produz uma cota superior útil para  $\lambda(n)$ . Qualquer circuito de comprimento  $n$  da rede dual ao redor da origem deve cruzar um elo da rede original da forma  $((0, k), (0, k + 1))$ , para algum  $-n/2 \leq k \leq n/2$ . A partir deste elo secante, cada um dos  $n - 1$  elos subsequentes pode ser colocado de no máximo 3 maneiras diferentes. Por isto

$$\lambda(n) \leq n3^{n-1}.$$

Substituindo na soma acima, temos

$$\sum_{n \geq 4} \frac{n}{3} [3(1 - p)]^n,$$

que é uma função contínua e decrescente em  $p$  quando  $p > 2/3$ , anulando-se quando  $p = 1$ . Segue-se que existe  $p_0 < 1$  tal que a expressão acima é estritamente menor do que 1 para  $p > p_0$ .  $\triangle$

Uma melhoria do argumento acima que mostra que a probabilidade de o aglomerado da origem ser infinito ( $\theta(p)$ ) é estritamente positiva para  $p > 2/3$  é o seguinte.

Denotemos por  $Q_M$  o quadrado centrado na origem e de lado  $2M + 1$ . Seja  $A_M$  o evento que todos os elos de  $Q_M$  estejam abertos e  $B_M$  o evento de haver um circuito fechado na rede dual *completamente fora de*  $Q_M$ .

Repetindo o argumento da demonstração acima, temos

$$P_p(B_M) \leq \sum_{n \geq 8M+4} \frac{n}{3} [3(1 - p)]^n.$$

Dado  $p > 2/3$ , esta expressão pode ser tornada estritamente menor do que 1 escolhendo-se  $M$  suficientemente grande, digamos  $M_0$ . Portanto

$$P_p(B_{M_0}^c) > 0. \tag{1.2.3}$$

Agora, na intersecção dos eventos  $A_{M_0}$  e  $B_{M_0}^c$ , o aglomerado da origem é infinito. Além disso,  $A_{M_0}$  e  $B_{M_0}^c$  são independentes, pois dependem de conjuntos disjuntos de elos. Logo, de (1.2.3) concluímos que

$$\theta(p) \geq P_p(A_{M_0} \cap B_{M_0}^c) = P_p(A_{M_0})P_p(B_{M_0}^c) > 0,$$

pois  $P_p(A_{M_0}) > 0$  (ainda que próximo de 0). O argumento está completo.

A probabilidade crítica  $p_c$  depende da dimensão e podemos denotá-la  $p_c(d)$ . As proposições acima mostram que

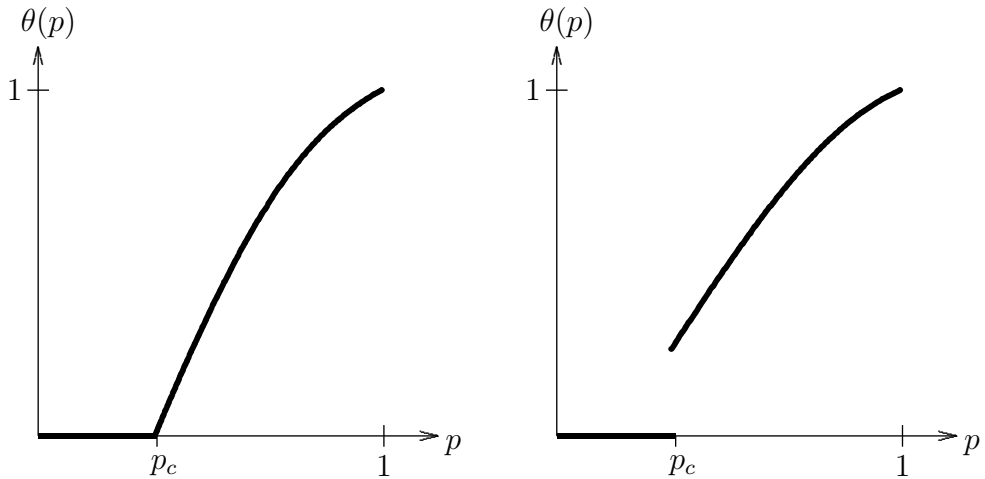
$$\frac{1}{2d-1} \leq p_c(d) \leq \frac{2}{3}.$$

Kesten [11] mostrou que

$$p_c(d) \sim \frac{1}{2d}$$

para dimensões grandes.

O Teorema 1.1.1 não diz nada sobre o que acontece em  $p = p_c$ . Como veremos no Capítulo 4,  $\theta(p)$  é uma função contínua, exceto possivelmente em  $p = p_c$ . Se  $\theta(p_c) = 0$ , então  $\theta(p)$  será contínua e seu gráfico se parecerá com o da figura à esquerda a seguir. Caso contrário, o gráfico será mais parecido com o da figura à direita.



Qual caso vale é uma questão em aberto para  $d$  genérico, mas se acredita que  $\theta(p)$  seja contínua. Isto está de fato provado em 2 dimensões e em dimensões grandes. Veremos o caso bidimensional no Capítulo 5 e discutiremos um método de ataque ao problema em mais dimensões no Capítulo 6.





# Capítulo 2

## Ferramentas úteis

Este capítulo será dedicado à apresentação de alguns resultados auxiliares a serem utilizados nos capítulos subsequentes. Todos dizem respeito a funções e eventos *crescentes*, que passamos a definir.

Para isto, introduzimos a ordem parcial em  $\Omega$

$$\omega \leq \omega' \Leftrightarrow \omega_e \leq \omega'_e \text{ para todo } e \in \mathbb{E}^d.$$

Uma variável aleatória  $X$  é dita crescente se for crescente na ordem parcial acima, isto é,

$$X(\omega) \leq X(\omega') \text{ sempre que } \omega \leq \omega'.$$

Um evento  $A \in \mathcal{E}$  é dito crescente se  $\mathbf{I}_A$ , a função indicadora de  $A$ , for crescente.

Em palavras, um evento  $A$  é crescente sempre que para cada configuração de elos abertos em que  $A$  ocorre, ao abrirmos mais elos nesta configuração,  $A$  continua ocorrendo. Exemplos comuns são os eventos  $\{x \leftrightarrow y\}$  em que dois sítios da rede estão conectados por um caminho de elos abertos e  $\{|C| = \infty\}$  em que o aglomerado da origem é infinito.

### 2.1 Desigualdade de FKG

Eventos e, mais geralmente, variáveis aleatórias crescentes do modelo de percolação têm a propriedade de serem positivamente correlacionadas.

**Teorema 2.1.1 (Desigualdade de FKG)** *Sejam  $Z$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias crescentes e limitadas em  $\Omega$ . Então*

$$E_p(ZY) \geq E_p(Z)E_p(Y). \quad (2.1.1)$$

**Prova do Teorema 2.1.1**

Vamos supor inicialmente que  $Z$  e  $Y$  sejam cilíndricas, isto é, dependam apenas de um conjunto finito de elos  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Provaremos o teorema neste caso por indução em  $n$ .

Para  $n = 1$ ,  $Z = f(X_{e_1})$  e  $Y = g(X_{e_1})$ , onde  $f$  e  $g$  são crescentes. Seja  $Y'$  uma cópia independente de  $X_{e_1}$  (isto é,  $Y'$  e  $X_{e_1}$  são i.i.d.). Então

$$[f(X_{e_1}) - f(Y')][g(X_{e_1}) - g(Y')] \geq 0,$$

pelo fato de  $f$  e  $g$  serem crescentes. Portanto

$$E_p \{ [f(X_{e_1}) - f(Y')][g(X_{e_1}) - g(Y')] \} \geq 0.$$

Expandindo o termo à esquerda, temos

$$\begin{aligned} & E_p[f(X_{e_1})g(X_{e_1})] + E_p[f(Y')g(Y')] \\ & \geq E_p[f(X_{e_1})g(Y')] + E_p[f(Y')g(X_{e_1})]. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Pela independência entre  $X_{e_1}$  e  $Y'$ , a expressão à direita fica

$$E_p[f(X_{e_1})]E_p[g(Y')] + E_p[f(Y')]E_p[g(X_{e_1})].$$

Como  $X_{e_1}$  e  $Y'$  têm a mesma distribuição, a desigualdade (2.1.2) fica

$$\begin{aligned} & E_p[f(X_{e_1})g(X_{e_1})] + E_p[f(X_{e_1})g(X_{e_1})] \\ & \geq E_p[f(X_{e_1})]E_p[g(X_{e_1})] + E_p[f(X_{e_1})]E_p[g(X_{e_1})], \end{aligned}$$

isto é

$$2E_p[f(X_{e_1})g(X_{e_1})] \geq 2E_p[f(X_{e_1})]E_p[g(X_{e_1})]$$

e o resultado está provado para  $n = 1$ .

Supondo-o válido para  $n = k$ , seja  $n = k + 1$ . Então

$$Z = f(X_{e_1}, \dots, X_{e_k}, X_{e_{k+1}}) \quad \text{e} \quad Y = g(X_{e_1}, \dots, X_{e_k}, X_{e_{k+1}}),$$

com  $f$  e  $g$  crescentes.

Agora

$$\begin{aligned} E_p(ZY) &= E_p \left[ f(X_{e_1}, \dots, X_{e_k}, X_{e_{k+1}}) g(X_{e_1}, \dots, X_{e_k}, X_{e_{k+1}}) \right] \\ &= E_p \left\{ E_p \left[ f(X_{e_1}, \dots, X_{e_k}, X_{e_{k+1}}) g(X_{e_1}, \dots, X_{e_k}, X_{e_{k+1}}) \mid X_{e_{k+1}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Na esperança condicional acima,  $X_{e_{k+1}}$  está fixo e portanto  $f$  e  $g$  podem ser vistas como funções de  $X_{e_1}, \dots, X_{e_k}$  e a hipótese de indução pode ser aplicada para dar que a última expressão acima é maior ou igual a

$$E_p \left\{ E_p \left[ f(X_{e_1}, \dots, X_{e_k}, X_{e_{k+1}}) \mid X_{e_{k+1}} \right] E_p \left[ g(X_{e_1}, \dots, X_{e_k}, X_{e_{k+1}}) \mid X_{e_{k+1}} \right] \right\}.$$

Agora é claro que as esperanças condicionais acima são funções crescentes de  $X_{e_{k+1}}$ . Novo uso da hipótese de indução produz o resultado para  $n = k + 1$ , completando o passo de indução.

Para completar a demonstração, consideremos  $Z$  e  $Y$  não necessariamente cilíndricas. Seja  $e_1, e_2, \dots$  uma enumeração de  $\mathbb{I}^d$ . Pelo Teorema da Convergência de Martingais (veja [9]),

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} E_p [Z \mid X_{e_1}, \dots, X_{e_n}]$$

e de maneira semelhante para  $Y$ . Pelo passo anterior, a desigualdade de FKG vale quando  $Z$  e  $Y$  são substituídos por

$$E_p [Z \mid X_{e_1}, \dots, X_{e_n}] \quad \text{e} \quad E_p [Y \mid X_{e_1}, \dots, X_{e_n}].$$

Uma passagem ao limite em  $n$  e o Teorema da Convergência Dominada nos dão o resultado geral.  $\triangle$

**Corolário 2.1.1** *Se  $A$  e  $B$  forem eventos crescentes, então*

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B). \quad (2.1.3)$$

**Prova**

Basta aplicar o Teorema 2.1.1 com  $Z = \mathbf{I}_A$  e  $Y = \mathbf{I}_B$   $\triangle$

Observamos que a desigualdade em (2.1.3) é equivalente a

$$P_p(A|B) \geq P_p(A),$$

o que nos diz que a ocorrência de um evento crescente aumenta a probabilidade de ocorrência de um outro evento crescente.

O Teorema 2.1.1 vale também para duas v.a.'s decrescentes (na ordem parcial), pois a desigualdade não muda se substituirmos  $Z$  e  $Y$  respectivamente por  $-Z$  e  $-Y$ , que são crescentes. Segue que o Corolário 2.1.1 vale também para dois eventos decrescentes.

As desigualdades acima foram primeiro provadas por Harris [2] e posteriormente generalizadas para outros modelos por Fortuin, Kasteleyn e Ginibre [12], cujas iniciais batizaram-nas.

## 2.2 Desigualdade de BK

A próxima desigualdade que discutiremos vai no sentido contrário da desigualdade de FKG e envolve uma intersecção *restrita* de eventos crescentes.

Dados dois eventos crescentes  $A$  e  $B$  de  $\mathcal{E}$ , dizemos que  $A$  e  $B$  ocorrem *disjuntamente* (para um dado  $\omega$ ) se existirem dois caminhos abertos (de elos) disjuntos (em  $\omega$ ) tais que o primeiro garante a ocorrência de  $A$  e o segundo garante a ocorrência de  $B$ . Denotamos por  $A \circ B$  a ocorrência disjunta de  $A$  e  $B$ .

Por exemplo, no evento  $\{x \leftrightarrow y\} \circ \{u \leftrightarrow v\}$  há dois caminhos abertos disjuntos, um ligando os sítios  $x$  e  $y$  e outro ligando os sítios  $u$  e  $v$ .

**Teorema 2.2.1 (Desigualdade de BK)** *Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos crescentes de  $\mathcal{E}$  dependendo apenas de um conjunto finito de elos. Então*

$$P_p(A \circ B) \leq P_p(A)P_p(B).$$

O nome da desigualdade é referência a seus descobridores van den Berg e Kesten [13]. A restrição a eventos que dependem apenas de um conjunto finito de elos deve-se a razões técnicas, a extensão pode ser feita para outros casos de interesse. Para uma discussão mais completa com a demonstração do resultado, veja [8] página 29. Discutiremos abaixo a idéia da prova, usando os eventos do exemplo acima, mas restritos a uma sub-rede finita de  $\mathbb{Z}^d$  (por

exemplo, o quadrado  $Q_M$  do capítulo anterior, para algum  $M$ ), do contrário eles dependerão de um conjunto infinito de elos.

Notemos para começar que dada a ocorrência de  $\{u \leftrightarrow v\}$ , temos informação sobre elos abertos, que *não podem* ser usados na ocorrência disjunta de  $\{x \leftrightarrow y\}$ . Isto torna plausível a desigualdade

$$P_p(\{x \leftrightarrow y\} \circ \{u \leftrightarrow v\} | u \leftrightarrow v) \leq P_p(x \leftrightarrow y).$$

A idéia da prova é a seguinte. Seja  $\mathcal{G}$  uma sub-rede finita de  $\mathbb{Z}^d$  e  $e$  um elo de  $\mathcal{G}$ . Substituamos  $e$  por dois elos paralelos  $e'$  e  $e''$  abertos com probabilidade  $p$  e fechados com probabilidade  $1 - p$  independentemente um do outro. Considera-se a ocorrência disjunta de  $\{x \leftrightarrow y\}$  e  $\{u \leftrightarrow v\}$  nesta nova rede, mas com o primeiro evento evitando  $e''$  e o segundo evento evitando  $e'$ . Observa-se que esta operação não pode diminuir a probabilidade original. Continua-se indutivamente substituindo-se os elos  $f$  de  $\mathcal{G}$  por elos paralelos e independentes  $f'$  e  $f''$  e considerando-se a ocorrência disjunta de  $\{x \leftrightarrow y\}$  e  $\{u \leftrightarrow v\}$  na nova rede, a ocorrência do primeiro sem usar elos  $''$  e a do segundo sem usar elos  $'$ . A operação não diminui a probabilidade do passo anterior. Ao término, esgotados todos os elos de  $\mathcal{G}$ , temos duas cópias independentes desta rede, uma na qual perguntamos pela ocorrência de  $\{x \leftrightarrow y\}$ , na outra perguntamos pela ocorrência de  $\{u \leftrightarrow v\}$ , eventos portanto independentes. A probabilidade final é então o produto das probabilidades dos eventos e a cadeia de desigualdades levando à probabilidade de ocorrência disjunta dos eventos em  $\mathcal{G}$  nos dá o resultado.

**Definição 2.2.1** *À probabilidade de que dois sítios  $x$  e  $y$  estejam conectados por um caminho aberto,*

$$P_p(x \leftrightarrow y),$$

*chamamos função de conectividade (entre  $x$  e  $y$ ), com a notação  $\tau_p(x, y)$ .*

## 2.3 Fórmula de Russo

O próximo resultado é uma fórmula para a derivada em  $p$  da probabilidade de um evento crescente. Para obtê-la, usaremos a construção acoplada do modelo de percolação usando a família de variáveis uniformes  $\mathcal{Z}$  vista no capítulo anterior (o modelo padrão).

Consideramos então, para uma dada configuração das variáveis em  $\mathcal{Z}$ , a configuração de elos  $p$ -abertos  $\omega_p$ , isto é,  $(\omega_p(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  tal que

$$\omega_p(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } Z_e < p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todo  $e \in \mathbb{E}^d$ .

Seja  $A$  um evento crescente que depende de um conjunto finito de elos  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{E}^d$  e considere

$$P_{p+\delta}(A) - P_p(A) = \mathbf{P}(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A). \quad (2.3.1)$$

Se  $A$  é crescente,  $\omega_p \notin A$  e  $\omega_{p+\delta} \in A$ , então há elos  $e$  tais que  $\omega_p(e) = 0$  mas  $\omega_{p+\delta}(e) = 1$ , isto é,  $p \leq Z_e < p + \delta$ . Denote por  $\mathcal{N}_{p,\delta}$  o conjunto de tais elos. A probabilidade de que  $|\mathcal{N}_{p,\delta}| \geq 2$  é  $o(\delta)$ . Por outro lado, se  $\omega_p \notin A$ ,  $\omega_{p+\delta} \in A$  e  $|\mathcal{N}_{p,\delta}| = 1$ , então o (estado do) elo  $e$  em questão deve ser *essencial* em  $\omega_p$  para (a ocorrência ou não de)  $A$  no sentido de que  $\omega_p \notin A$ , mas  $\omega'_p \in A$ , onde  $\omega'_p$  é a configuração obtida de  $\omega_p$  trocando o status do elo  $e$  de 0 para 1. A última probabilidade em (2.3.1) fica, então,

$$\mathbf{P}(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, |\mathcal{N}_{p,\delta}| = 1) + o(\delta).$$

A probabilidade acima pode ser escrita como

$$\sum_{e \in \mathcal{G}} \mathbf{P}(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, \mathcal{N}_{p,\delta} = \{e\}).$$

O evento dentro da probabilidade na soma é equivalente ao evento

$$\{e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta, \mathcal{N}_{p,\delta} = \{e\}\}.$$

Aquela probabilidade pode ser escrita, então, como

$$\mathbf{P}[e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta] \quad (2.3.2)$$

$$- \mathbf{P}[e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta, \mathcal{N}_{p,\delta} \neq \{e\}]. \quad (2.3.3)$$

A probabilidade em (2.3.3) é limitada superiormente por

$$\mathbf{P}(|\mathcal{N}_{p,\delta}| \geq 2) = o(\delta).$$

Observemos agora que o evento  $\{e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A\}$  não depende de  $e$ . Logo, a probabilidade em (2.3.2) fatora.

Combinando os argumentos acima, temos

$$\begin{aligned} P_{p+\delta}(A) - P_p(A) &= \sum_e \mathbf{P}(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A) \mathbf{P}(p \leq Z_e < p + \delta) + o(\delta) \\ &= \delta \sum_e \mathbf{P}(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A) + o(\delta) \\ &= \delta E(N(A)) + o(\delta), \end{aligned}$$

onde  $N(A)$  denota o número de elos essenciais em  $\omega_p$  para  $A$  (e  $E$  é a esperança com respeito a  $\mathbf{P}$ ).

Modificando um pouco a terminologia, e voltando ao modelo com as variáveis de Bernoulli, dado um evento qualquer  $A \in \mathcal{E}$  e uma configuração  $\omega \in \Omega$ , definimos um elo  $e$  como *pivotal* para  $A$  (mais precisamente, para  $(A, \omega)$ ) se, denotando por  $\omega'$  a configuração idêntica a  $\omega$  em todos os elos com exceção de  $e$ , em que  $\omega$  e  $\omega'$  são diferentes, uma das duas coisas acontece: ou

$$\omega \in A \quad \text{e} \quad \omega' \notin A$$

ou

$$\omega \notin A \quad \text{e} \quad \omega' \in A.$$

Seja  $N(A)$  o número de elos pivotais para  $A$ . O argumento acima prova o seguinte.

**Teorema 2.3.1 Fórmula de Russo [14]**

*Se  $A$  for um evento crescente dependendo de um conjunto finito de elos, então*

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = E_p(N(A)). \quad (2.3.4)$$

A equação (2.3.4) também pode ser escrita

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \sum_e P_p(e \text{ é pivotal para } A).$$

O uso que se fará da fórmula de Russo parte da observação de que o evento  $\{e \text{ é pivotal para } A\}$  é independente do elo  $e$  e portanto independente do evento  $\{e \text{ está aberto}\}$ , para deduzir que

$$P_p(e \text{ é pivotal para } A) = \frac{1}{p} P_p(e \text{ está aberto e é pivotal para } A).$$



Logo, se  $A$  for crescente, aplicando a fórmula de Russo temos

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = \frac{1}{p} \sum_e P_p(e \text{ está aberto e é pivotal para } A) \quad (2.3.5)$$

$$= \frac{1}{p} \sum_e P_p(A \cap \{e \text{ é pivotal para } A\}) \quad (2.3.6)$$

$$= \frac{1}{p} \sum_e P_p(A)P_p(e \text{ é pivotal para } A|A) \quad (2.3.7)$$

$$= \frac{1}{p} E_p(N(A)|A)P_p(A). \quad (2.3.8)$$

Dividindo a primeira e última expressões por  $P_p(A)$  e integrando em  $[p_1, p_2]$  ( $0 < p_1 \leq p_2 \leq 1$ ), chegamos a

$$P_{p_2}(A) = P_{p_1}(A) \exp \left( \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} E_p(N(A)|A) dp \right). \quad (2.3.9)$$

A identidade acima será aplicada no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Fase Subcrítica: Decaimento Exponencial

Poderíamos definir outros pontos críticos no modelo de percolação. Por exemplo, lembrando que  $\chi_p$  é o valor esperado do volume do aglomerado aberto da origem, seja

$$\tilde{p} = \sup\{p : \chi_p < \infty\}. \quad (3.1)$$

A prova da Proposição 1.2.1 mostra que  $\tilde{p}$  está bem definido e é positivo. É claro que  $\tilde{p} \leq p_c$  (pois se  $\theta(p) = P_p(|C| = \infty) > 0$ ) então  $\chi_p = \infty$ ).

Neste capítulo, veremos que  $\tilde{p} = p_c$ , eliminando a existência de uma fase intermediária  $(\tilde{p}, p_c)$  e estabelecendo a assim chamada *unicidade* do ponto crítico.

Este resultado foi provado independentemente por Menshikov [4] e Aizenman e Barsky [5] por argumentos diferentes (para  $d$  geral; em 2 dimensões foi provado por Kesten [3] como consequência de que, neste caso,  $p_c = 1/2$ ). Mostraremos a seguir o argumento de Menshikov (com uma melhoria de Kesten, não publicada).

Sejam  $S_n$  a esfera  $L_1$  em  $\mathbb{Z}^d$  de raio  $n$  com centro na origem, isto é

$$S_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq n\}$$

e  $A_n$  o evento de que existe um caminho aberto da origem à fronteira de  $S_n$ .

**Teorema 3.1 (Menshikov)** *Se  $p < p_c$ , então para algum  $\psi_p > 0$*

$$P_p(A_n) \leq e^{-\psi_p n} \quad \text{para todo } n. \quad (3.2)$$

**Corolário 3.1**  $\chi_p < \infty$  se  $p < p_c$ .

**Observação 3.1** Na fase supercrítica  $\chi_p = \infty$ , obviamente. Prova-se também [8] que

$$\lim_{p \uparrow p_c} \chi_p = \infty.$$

**Prova do Corolário 3.1.**

O Teorema 3.1 estabelece o decaimento exponencial da distribuição do raio de  $C$ . De (3.2) concluímos que

$$P_p(|C| \geq n) \leq e^{-\psi'_p n^{1/d}}, \quad (3.3)$$

com  $\psi'_p > 0$ . Logo,

$$\chi_p = \sum_{n \geq 1} P_p(|C| \geq n) < \infty. \quad \triangle$$

**Observação 3.2** (3.3) estabelece decaimento subexponencial da distribuição de  $|C|$ . Com um pouco mais de trabalho, mostra-se o decaimento exponencial desta distribuição (vide [8]).

A prova do Teorema 3.1 será apresentada em uma introdução mais três partes.

### Introdução

Defina

$$g_p(n) = P_p(A_n). \quad (3.4)$$

Note que  $g_p(n) \downarrow \theta(p)$  quando  $n \uparrow \infty$ . Logo, se  $p < p_c$ , existe  $p'$  satisfazendo  $p < p' < p_c$  e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{p'}(n) = \theta(p') = 0.$$

O problema é mostrar que para algum  $p'$ , se  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{p'}(n) = 0$  então para  $p < p'$

$$g_p(n) \leq e^{-\psi_p n}.$$

Queremos limitar  $g_p(n)$  superiormente em termos de  $g_{p'}(n)$  e mais alguma coisa (é preciso melhorar a cota trivial  $g_p(n) \leq g_{p'}(n)$ ).

### Parte 1

Como já vimos no Capítulo 2, Seção 3, a fórmula de Russo produz a seguinte desigualdade para  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ .

$$g_\alpha(n) \leq g_\beta(n) \exp\left(-\int_\alpha^\beta E_p(N(A_n)|A_n)dp\right), \quad (3.5)$$

onde  $N(A_n)$  é o número de elos pivotais para o evento  $A_n$ .

### Parte 2

Para um dado  $\beta$ , seja  $M$  o raio (aleatório) do aglomerado aberto da origem (isto é,  $\max_{x \in C} \|x\|_1$  ou, equivalentemente,  $\max\{k : A_k \text{ ocorre}\}$ ). Note que se  $\theta(p) > 0$ , então  $M = \infty$  com probabilidade positiva e se  $\theta(p) = 0$  então  $M$  é uma variável aleatória finita com valores inteiros.

Sejam  $M_1, M_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de  $M$ . Mostraremos mais adiante que

$$P_p(N(A_n) \geq k|A_n) \geq P((1 + M_1) + \dots + (1 + M_k) \leq n), \quad (3.6)$$

para todo  $k \geq 0$ , o que relaciona  $N(A_n)$  (condicionado a  $A_n$ ) a um processo de renovação. Usando métodos usuais em tais processos, conclui-se que

$$\begin{aligned} E_p(N(A_n)|A_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_p(N(A_n) \geq k|A_n) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} P((1 + M_1) + \dots + (1 + M_k) \leq n) \\ &\geq \frac{n}{E(1 + M \wedge n)} - 1 = \frac{n}{\sum_{i=0}^n g_p(i)} - 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

### Parte 3

Combinam-se as partes 1 e 2 para obter para  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ :

$$g_\alpha(n) \leq g_\beta(n) \exp\left[(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha) \frac{n}{\sum_{i=0}^n g_\beta(i)}\right]. \quad (3.8)$$

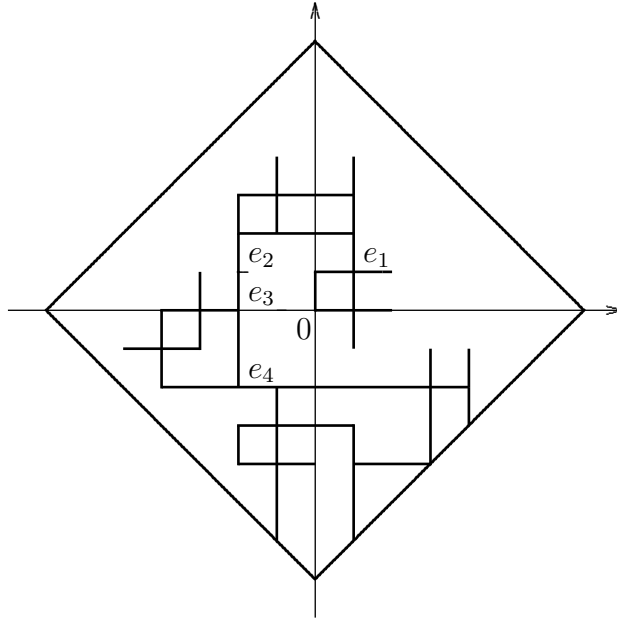


Figura 3.1: Figura do aglomerado da origem em  $S_7$ . Há exatamente 4 elos pivotais para  $A_7$  nesta configuração, denotados  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  e  $e_4$ .

Da desigualdade acima, concluiremos que

$$\sum_{i=0}^n g_\beta(i) < \infty, \quad (3.9)$$

do que segue o teorema.

Em seguida apresentaremos as partes 2 e 3 em detalhes.

### Parte 2

Sejam  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  os elos pivotais abertos para  $A_n$  na ordem com que são atingidos por um caminho aberto da origem até  $\partial S_n$ . (Note que a ordem é a mesma para qualquer tal caminho devido à pivotalidade.) Escreva  $e_j$  como  $(x_j, y_j)$  (Na "ordem correta". Veja a Figura 3.1).

Os elos do aglomerado da origem entre os elos pivotais sucessivos formam

*salsichas*. O aglomerado da origem em  $S_n$  pode ser visto então como como salsichas de elos conectadas por elos pivotais.

Sejam

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \|x_1\|_1 \\ \rho_2 &= \|y_1 - x_2\|_1 \\ &\vdots \\ \rho_n &= \|y_{n-1} - x_n\|_1.\end{aligned}$$

Os  $\rho_i$ 's representam os *raios* das salsichas sucessivas.

Então  $N(A_n) \geq k$  se

$$(\rho_1 + 1) + (\rho_2 + 1) + \dots + (\rho_k + 1) \leq n,$$

ou seja,

$$\rho_1 + \dots + \rho_k \leq n - k.$$

Logo,

$$P_p(N(A_n) \geq k | A_n) \geq P_p(\rho_1 + \dots + \rho_k \leq n - k | A_n). \quad (3.10)$$

Queremos mostrar que

$$P_p(\rho_1 + \dots + \rho_k \leq n - k | A_n) \geq P_p(M_1 + \dots + M_k \leq n - k), \quad (3.11)$$

para todo  $n$  e  $k$ , onde  $M_1, M_2, \dots$  são variáveis aleatórias independentes com distribuição comum igual àquela do raio do aglomerado da origem (vamos denotar esta última v.a. por  $M$ ).

Para obter a última desigualdade, seria bom se bastasse provar desigualdades envolvendo probabilidades condicionais do tipo

$$P_p(\rho_k \leq r_k | \rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-1} = r_{k-1}, A_n) \geq P(M_k \leq r_k), \quad (3.12)$$

para todo  $n$ ,  $k$  e  $r_1 + \dots + r_k \leq n - k$ .

O próximo lema mostra que este é o caso.

**Lema 3.1** *A desigualdade (3.12) implica a desigualdade (3.11)*

Portanto é suficiente provar o seguinte.

**Lema 3.2** *A desigualdade (3.12) é válida.*

Antes de provarmos os lemas acima, vejamos porque (3.11) implica no resultado da parte 2.

De (3.10) e (3.11), temos

$$P_p(N(A_n) \geq k | A_n) \geq P((1 + M_1) + \dots + (1 + M_k) \leq n). \quad (3.13)$$

Consideremos  $M'_1, M'_2, \dots$  v.a.'s independentes com a mesma distribuição de  $M' = 1 + M \wedge n$ . Temos

$$P_p(N(A_n) \geq k | A_n) \geq P(M'_1 + \dots + M'_k \leq n).$$

Agora usamos um pouco da teoria da renovação elementar. Considere um processo de renovação com "tempos de vida"  $M'_1, M'_2, \dots$  (e portanto instantes de renovação  $M'_1, M'_1 + M'_2, \dots, M'_1 + \dots + M'_k, \dots$ )

Defina a v.a.  $K$  como 1 mais o número de renovações até o instante  $n$ , isto é,

$$K = \min\{k : M'_1 + \dots + M'_k > n\}.$$

Temos então

$$P(M'_1 + \dots + M'_k \leq n) = P(K \geq k + 1) = P(K - 1 \geq k).$$

Somando sobre  $k \geq 1$ :

$$E_p(N(A_n) | A_n) \geq E(K - 1) = E(K) - 1.$$

Para obter uma cota inferior para  $E(K)$  usamos a *Identidade de Wald* [9], que diz que

$$E(M'_1 + \dots + M'_K) = E(K)E(M').$$

Como, claramente,  $M'_1 + \dots + M'_K \geq n + 1 > n$ , temos imediatamente que

$$E(K) - 1 > \frac{n}{E(M')} - 1,$$

como queríamos.

Vamos agora às demonstrações dos lemas.

**Prova do Lema 3.1**

$$\begin{aligned}
& P_p(\rho_1 + \dots + \rho_k \leq n - k | A_n) \\
&= \sum_{r_1, \dots, r_{k-1}} P_p(\rho_k \leq n - k - \sum_{i=1}^{k-1} r_i | \rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-1} = r_{k-1}, A_n) \\
&\quad \times P_p(\rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-1} = r_{k-1} | A_n) \\
&\geq \sum_{r_1, \dots, r_{k-1}} P_p(M_k \leq n - k - \sum_{i=1}^{k-1} r_i) P_p(\rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-1} = r_{k-1} | A_n) \\
&= P_p(\rho_1 + \dots + \rho_{k-1} + M_k \leq n - k | A_n) \\
&= \sum_{r_1, \dots, r_{k-2}, r_k} P_p(\rho_{k-1} \leq n - k - \sum_{i=1, i \neq k-1}^k r_i | \rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-2} = r_{k-2}, \\
&\quad M_k = r_k, A_n) P_p(\rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-2} = r_{k-2}, M_k = r_k | A_n) \\
&\geq \sum_{r_1, \dots, r_{k-2}, r_k} P_p(M_{k-1} \leq n - k - \sum_{i=1, i \neq k-1}^k r_i) \\
&\quad \times P_p(\rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-2} = r_{k-2}, M_k = r_k | A_n) \\
&= P_p(\rho_1 + \dots + \rho_{k-2} + M_{k-1} + M_k \leq n - k | A_n) \\
&\quad \vdots \\
&\geq P_p(M_1 + \dots + M_k \leq n - k),
\end{aligned}$$

as desigualdades acima todas seguindo de (3.12).

**Prova do Lema 3.2**

Queremos provar que

$$P_p(\rho_k \leq r_k | \rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-1} = r_{k-1}, A_n) \geq P_p(M \leq r_k) \quad (3.14)$$

quando  $r_1 + \dots + r_k \leq n - k$ . Isto é equivalente a (denotando o evento  $\{\rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-1} = r_{k-1}\}$  por  $B$ )

$$P_p(\rho_k > r_k, B, A_n) \leq P_p(M > r_k) P_p(B, A_n). \quad (3.15)$$

Note que  $\{M > r_k\} = A_{r_k+1}$ . Para  $k = 1$  a desigualdade se torna

$$P_p(\rho_1 > r_1, A_n) \leq P_p(A_{r_1+1}) P_p(A_n) \quad (3.16)$$

para  $r_1 \leq n - 1$ .



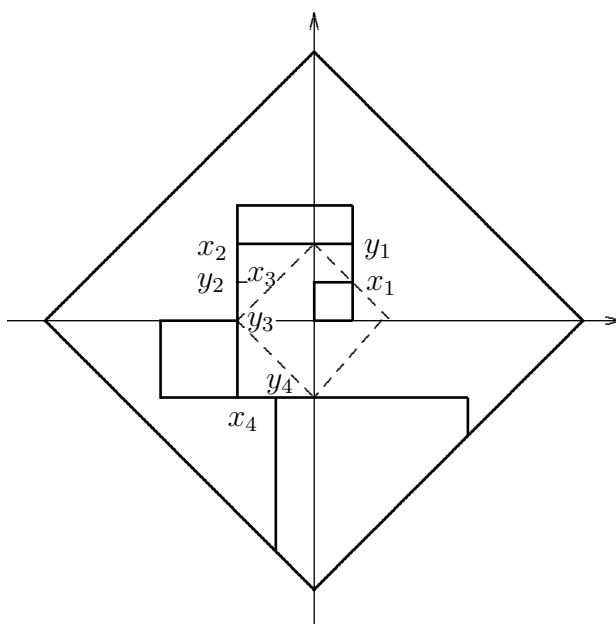


Figura 3.2: Os elos pivotais são  $e_i = (x_i, y_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Note que  $x_3 = y_2$  nesta configuração. A linha tracejada é a superfície  $\partial S_{\rho_1}$  de  $S_{\rho_1}$ . Note os caminhos disjuntos da origem a  $\partial S_{\rho_1}$ .

No evento em que  $\{\rho_1 > r_1\}$ , a origem está conectada por dois caminhos disjuntos a  $x_1$  e  $x_1$  está a distância pelo menos  $r_1 + 1$  da origem (veja a Figura 3.2).

No evento  $\{\rho_1 > r_1\} \cap A_n$ , há dois caminhos disjuntos, um de  $O$  a  $\partial S_{r_1+1}$  e outro de  $O$  a  $\partial S_n$ . Portanto,

$$\{\rho_1 > r_1\} \cap A_n \subset A_{r_1+1} \circ A_n$$

e a desigualdade de BK produz a desigualdade (3.16).

Para  $k > 1$ , escreva

$$B = \bigcup_{\Gamma} B_{\Gamma},$$

união disjunta sobre configurações (detalhadas) das salsichas até  $y_{k-1}$ . Então

$$P_p(B, A_n) = \sum_{\Gamma} P_p(A_n | B_{\Gamma}) P_p(B_{\Gamma}) \quad (3.17)$$

e

$$P_p(\rho_k > r_k, B, A_n) = \sum_{\Gamma} P_p(\rho_k > r_k, A_n | B_{\Gamma}) P_p(B_{\Gamma}). \quad (3.18)$$

Logo é suficiente mostrar para cada  $\Gamma$ :

$$P_p(\rho_k > r_k, A_n | B_{\Gamma}) \leq P_p(A_{r_k+1}) P_p(A_n | B_{\Gamma}). \quad (3.19)$$

Mas a probabilidade à esquerda é menor ou igual a

$$P_p(\text{há caminhos disjuntos abertos de } y_{k-1} \text{ a } \partial S(y_{k-1}, r_k + 1) \text{ e de } y_{k-1} \text{ a } \partial S_n \text{ que não usam elos dos fechos das salsichas anteriores}),$$

onde  $S(y_{k-1}, r_k + 1)$  é a esfera de centro em  $y_{k-1}$  e raio  $r_k + 1$ .

Como no caso  $k = 1$ , da desigualdade de BK, desta vez aplicada substituindo  $\mathbb{I}E^d$  por  $\mathbb{I}E^d \setminus (\text{elos dos fechos das salsichas anteriores})$ , segue que a probabilidade acima é menor ou igual a

$$P_p(y_{k-1} \leftrightarrow \partial S(y_{k-1}, r_k + 1) \text{ sem usar elos anteriores}) \\ \times P_p(y_{k-1} \leftrightarrow \partial S_n \text{ sem usar elos anteriores}).$$

A última probabilidade é igual a  $P_p(A_n | B_{\Gamma})$ . A primeira é menor ou igual a

$$P_p(y_{k-1} \leftrightarrow \partial S(y_{k-1}, r_k + 1))$$

que, pela invariância translacional do modelo, é igual a  $P_p(A_{r_{k+1}})$ .  $\triangle$

A conclusão de que (3.9), e portanto o Teorema 3.1, segue de (3.8) se dá através do próximo lema, um resultado puramente analítico, cuja prova será apresentada no apêndice a estas notas.

**Lema 3.3** *Para  $p < p_c$ , existe uma constante  $\delta(p)$  tal que*

$$g_p(n) \leq \delta(p)n^{-1/2}. \quad (3.20)$$

**Prova do Teorema 3.1** De (3.20), temos que

$$\sum_{i=0}^n g_p(i) \leq \Delta(p)n^{1/2}, \quad (3.21)$$

para algum  $\Delta(p)$ .

Substituindo (3.21) em (3.8), obtemos

$$g_\alpha(n) \leq g_\beta(n) \exp \left[ (\beta - \alpha) - c(\beta - \alpha)n^{1/2} \right], \quad (3.22)$$

onde  $c$  é uma constante positiva, o que implica (3.9).  $\triangle$

É uma consequência imediata do Teorema 3.1 o decaimento exponencial da função de conectividade.

**Corolário 3.2**

$$\tau_p(x, y) \leq e^{-\phi_p \|x-y\|_1}, \quad (3.23)$$

com  $\phi_p > 0$  para  $p < p_c$ .

(Verifique!)

Em seguida apresentamos outro corolário ao Teorema 3.1 estabelecendo a suavidade de  $\chi_p$  na fase subcrítica.

**Corolário 3.3**  $\chi_p$  é  $k$  vezes diferenciável em  $p < p_c$  para todo  $k \geq 1$ .

**Prova.**

Como  $p < p_c$ , podemos escrever  $\chi_p$  como

$$\chi_p = \sum_{n=1}^{\infty} n P_p(|C| = n). \quad (3.24)$$

A última probabilidade pode ser expressa como

$$P_p(|C| = n) = \sum_{m,b} a_{nmb} p^m (1-p)^b, \quad (3.25)$$

onde  $a_{nmb}$  é o número de animais de rede com  $n$  sítios,  $m$  elos e  $b$  elos de fronteira. Por *animal de rede* denotamos conjuntos conexos de sítios da rede contendo a origem.

Para  $n$  fixo, são válidas as seguintes cotas para  $m$  e  $b$  (verifique-as!)

$$n - 1 \leq m \leq dn \quad \text{e} \quad b \leq 2dn. \quad (3.26)$$

Estas produzem a seguinte cota para  $\sum_{m,b} a_{nmb}$

$$\begin{aligned} 1 \geq \sum_{m,b} a_{nmb} p^m (1-p)^b &\geq \sum_{m,b} a_{nmb} p^{dn} (1-p)^{2dn} \\ &= (p(1-p)^2)^{dn} \sum_{m,b} a_{nmb}, \end{aligned}$$

do que temos

$$\sum_{m,b} a_{nmb} \leq (p(1-p)^2)^{-dn} \leq 7^{dn}. \quad (3.27)$$

Voltando a (3.25), temos

$$\chi_p = \sum_n \sum_{m=n-1}^{dn} \sum_{b=1}^{2dn} n a_{nmb} p^m (1-p)^b. \quad (3.28)$$

Vamos dividir o argumento em dois. Para  $p = 0$ , provaremos o fato mais forte de que  $\chi_p$  é analítica (isto é, pode ser escrita como série de potências convergente de  $p$ , o que implica em suavidade). Em seguida, provaremos suavidade para  $0 < p < p_c$ .

Estendendo  $\chi_p$  formalmente ao plano complexo a partir de (3.28), temos

$$K(z) = \sum_n \sum_{m=n-1}^{dn} \sum_{b=1}^{2dn} n a_{nmb} z^m (1-z)^b. \quad (3.29)$$

Para provarmos analiticidade de  $\chi_p$  na origem, basta mostrarmos (pelo Teorema de Vitali), que a série acima é uniformemente convergente numa região do plano complexo contendo a origem.

De (3.27) temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=n-1}^{dn} \sum_{b=1}^{2dn} na_{nmb} z^m (1-z)^b \right| &\leq \sum_{m=n-1}^{dn} \sum_{b=1}^{2dn} na_{nmb} |z|^m (1+|z|)^b \\ &\leq n7^{dn} |z|^{n-1} (1+|z|)^{2dn} \\ &\leq Anc(z)^{n-1} \end{aligned}$$

se  $|z| \leq 1$ , onde  $A$  depende apenas de  $d$  e  $c(z) = |z|\{7(1+|z|)^2\}$ .

Para  $|z|$  suficientemente pequeno,  $c(z) < 1$  e concluímos que a série definindo  $K(z)$  é uniformemente convergente numa vizinhança complexa da origem e portanto  $\chi_p$  é analítica em  $p = 0$ .

Em seguida, vamos diferenciar  $\chi_p$  formalmente  $k$  vezes usando (3.28) para obter

$$\frac{d^k}{dp^k} \chi_p = \sum_n \sum_{m=n-1}^{dn} \sum_{b=1}^{2dn} na_{nmb} \frac{d^k}{dp^k} (p^m (1-p)^b). \quad (3.30)$$

Para obter a diferenciabilidade de  $\chi_p$  em  $I := (0, p_c)$ , basta mostrar que a série acima é uniformemente convergente num intervalo fechado arbitrário de  $I$ . Para isto notemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^k}{dp^k} (p^m (1-p)^b) \right| &= \left| \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} m_r b_{k-r} p^{m-r} (-1)^{k-r} (1-p)^{b-(k-r)} \right| \\ &\leq p^m (1-p)^b \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (m/p)^r (b/(1-p))^{k-r} \\ &= p^m (1-p)^b \left( \frac{m}{p} + \frac{b}{1-p} \right)^k, \end{aligned}$$

onde  $x_r = x!/r!$ . Logo,

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq N} \left| \sum_{m=n-1}^{dn} \sum_{b=1}^{2dn} na_{nmb} \frac{d^k}{dp^k} (p^m (1-p)^b) \right| \\ &\leq \left( \frac{2d}{p(1-p)} \right)^k \sum_{n \geq N} n^k \sum_{m=n-1}^{dn} \sum_{b=1}^{2dn} na_{nmb} p^m (1-p)^b \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{2d}{p(1-p)} \right)^k \sum_{n \geq N} n^k P_p(|C| = n)$$

e, portanto, (3.3) implica na convergência uniforme de (3.30) em intervalos fechados de  $I$ .  $\triangle$

**Observação 3.3** *Um argumento semelhante ao da prova acima, mas usando o decaimento exponencial da distribuição de  $|C|$  (como discutido na Observação 3.2), prova analiticidade de  $\chi_p$  em  $(0, p_c)$ . (Vide [8].)*



## Capítulo 4

# Fase Supercrítica: Unicidade do Aglomerado Infinito

A ergodicidade da medida produto tem como consequência que, quase certamente, existe um aglomerado infinito quando  $\theta(p) > 0$ .

De fato, o evento de que existe um aglomerado infinito ( $\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|C_x| = \infty\}$ ) é invariante por translação e portanto trivial sob  $P_p$ . (O que decorre também deste evento ser caudal e da Lei 0-1 de Kolmogorov.)

Neste capítulo, a ergodicidade será explorada para estabelecer um dos aspectos mais interessantes desta fase, o fato de que o aglomerado infinito é único (quase certamente).

Vamos definir por  $\eta$  a variável aleatória que conta o número de aglomerados infinitos distintos de uma configuração de  $\Omega$ .  $\eta$  é invariante por translação (pois translações das configurações de  $\Omega$  não alteram o número de aglomerados infinitos delas) e as medidas  $P_p$  são ergódicas, por serem produto. Portanto, por uma conhecida lei 0-1,  $\eta$  é constante quase certamente. Em princípio,  $\eta$  pode assumir qualquer valor inteiro, desde 0 até  $\infty$ . O resultado principal deste capítulo exclui  $\eta \geq 2$ .

**Teorema 4.1** *Qualquer que seja  $p \in [0, 1]$ ,*

$$P_p(\eta = 0) = 1 \tag{4.1}$$

*ou*

$$P_p(\eta = 1) = 1. \tag{4.2}$$



O Teorema 4.1 é provado por meio das seguintes proposições, devidas respectivamente a Newman e Schulman [15] e Aizenman, Kesten e Newman [6]. A primeira, exclui  $2 \leq \eta < \infty$ . A segunda exclui  $\eta \geq 3$ . (Infelizmente, não se pode incluir  $\infty$  na primeira ou 2 na segunda.)

**Proposição 4.1** *Qualquer que seja  $p \in [0, 1]$ ,*

$$P_p(\eta = 0) = 1 \quad (4.3)$$

ou

$$P_p(\eta = 1) = 1 \quad (4.4)$$

ou

$$P_p(\eta = \infty) = 1. \quad (4.5)$$

### Prova

Seja  $k_p$  a constante tal que  $P_p(\eta = k_p) = 1$ . Suponha que  $1 \leq k_p < \infty$ . Vamos mostrar que disto se segue que  $P_p(\eta = 1) > 0$ , o que implica pela trivialidade de  $\eta$  que  $k_p = 1$ .

De fato, denotando por  $Q_n$  o cubo de lado  $2n + 1$  centrado na origem., considere o evento

$$A_n = \{\text{todos os aglomerados infinitos intersectam } Q_n\}. \quad (4.6)$$

Note que  $A_n$  depende da configuração de elos apenas da fronteira de  $Q_n$  para fora. Como  $k_p < \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(A_n, \eta = k_p) = P_p(\eta = k_p) = 1. \quad (4.7)$$

Seja  $n_0$  tal que  $P_p(A_{n_0}) > 0$  e considere o evento

$$B_{n_0} = \{\text{todos os elos interiores de } Q_{n_0} \text{ estão abertos}\}. \quad (4.8)$$

Note que  $B_{n_0}$  depende apenas dos elos interiores a  $Q_{n_0}$  e logo é independente de  $A_{n_0}$ .

Finalmente, o evento de que  $\eta = 1$  contem  $A_{n_0} \cap B_{n_0}$ . Concluimos da discussão acima que

$$P_p(\eta = 1) \geq P_p(A_{n_0} \cap B_{n_0}) = P_p(A_{n_0})P_p(B_{n_0}) > 0. \quad \triangle \quad (4.9)$$

**Proposição 4.2** *Qualquer que seja  $p \in [0, 1]$ ,*

$$P_p(\eta \geq 3) = 0. \quad (4.10)$$

Deste resultado apresentaremos uma prova diferente da original de Aizenman, Kesten e Newman, mais simples e geral, devida a Burton e Keane [16]. Ela se vale do argumento geométrico esboçado a seguir.

A ocorrência de três aglomerados infinitos disjuntos (e a ergodicidade de  $P_p$ ) tem como conseqüência a existência de uma densidade de *pontos triplos especiais*, isto é, sítios ligados por elos disjuntos a três aglomerados infinitos, que seriam disjuntos ao se remover os elos incidentes àqueles sítios. Mas um lema sobre grafos (que será enunciado abaixo como exercício) mostra que dentro de um cubo podem existir um número de pontos triplos especiais apenas da ordem da área da fronteira do cubo. Da contradição segue o resultado da proposição.

Agora enunciamos o lema sobre grafos, em forma de exercício para o leitor.

### Exercício

Seja  $G$  um grafo conexo com conjunto de sítios  $S$  e conjunto de elos  $E$ . Um sítio  $x$  em  $S$  será chamado um *ponto triplo* para  $G$  se

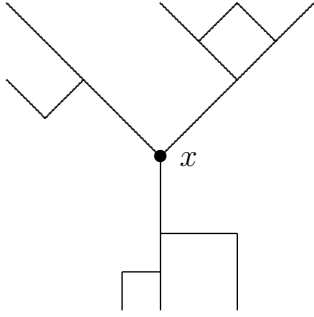
- i) existirem apenas três elos de  $E$  tocando  $x$  e
- ii) o grafo  $G \setminus \{x\}$ , em que  $x$  é removido de  $S$  e os três elos tocando em  $x$  são removidos de  $E$ , tem exatamente três componentes conexos. (Denotaremos os conjuntos de sítios destes três componentes  $E_1(x)$ ,  $E_2(x)$ ,  $E_3(x)$  e os chamaremos de ramos. Veja Figura 4.1.)

a. Suponha que  $G$  seja um grafo conexo e que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sejam pontos triplos distintos para  $G$ . Mostre que para algum  $i$  dois dos três ramos em  $x_i$ , digamos  $E_2(x_i)$  e  $E_3(x_i)$  não contêm nenhum dos outros pontos triplos  $(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\})$ . [Sugestão: indução em  $n$ ]

b. Considere o grafo  $G'$  obtido de  $G$  e  $x_1, \dots, x_n$  do item anterior removendo-se todos os sítios de  $E_3(x_i)$  e todos os elos tocando estes sítios. Mostre que  $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$  são pontos triplos para  $G'$ .

c. Suponha que  $G$  seja um grafo conexo e que  $x_1, \dots, x_n$  sejam pontos triplos distintos de  $G$ . Entre os  $3n$  ramos,

$$E_1(x_1), E_2(x_1), E_3(x_1), E_1(x_2), \dots, E_3(x_n),$$

Figura 4.1:  $x$  é um ponto triplo

mostre que se pode achar pelo menos  $n+2$  ramos *disjuntos*.

### Prova da Proposição 4.2

Suponha que  $P_p(\eta \geq 3) > 0$ . Vamos procurar uma contradição.

Seja o evento

$$F_n = \{\text{pelo menos três aglomerados infinitos abertos distintos atingem } Q_{n-1}\}.$$

Note que  $F_n \uparrow \{\eta \geq 3\}$  quando  $n \uparrow \infty$ , logo existe  $n_0$  tal que  $P_p(F_{n_0}) > 0$ . Dados  $y_1, y_2, y_3$  três pontos distintos no interior das faces de  $\partial Q_{n_0}$ , seja o evento

$$F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) = \{y_1, y_2, y_3 \text{ pertencem a aglomerados infinitos distintos usando apenas os exteriores a } Q_{n_0}^1\}.$$

Como  $F_{n_0} \subset \bigcup_{y_1, y_2, y_3} F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)$ , temos que

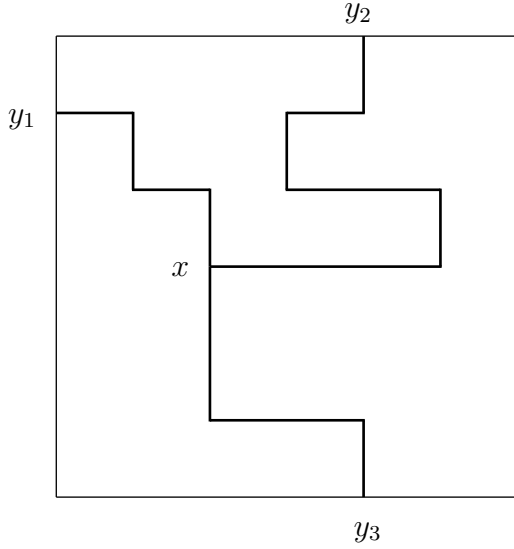
$$P_p(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0 \tag{4.11}$$

para algum  $y_1, y_2, y_3$ . Dados estes  $y_1, y_2, y_3$ , seja  $x = x(y_1, y_2, y_3)$  um ponto do interior de  $Q_{n_0}$  com a propriedade de que há três caminhos de elos disjuntos no interior  $Q_{n_0}$ <sup>2</sup> ligando  $x$  a  $y_1, y_2, y_3$  respectivamente. Defina agora o evento

$$F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) = \{\text{os três caminhos mencionados acima estão abertos, todos os demais elos do interior de } Q_{n_0} \text{ estão fechados}\}.$$

<sup>1</sup>exclui elos com pelo menos uma extremidade em  $Q_{n-1}$

<sup>2</sup> $Q_{n-1}$  mais os elos com uma extremidade em  $Q_{n-1}$


 Figura 4.2: O evento  $F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3)$ .

Logo

$$\begin{aligned} & P_p(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) \\ &= P_p(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3))P_p(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0, \end{aligned}$$

onde a igualdade segue da independência dos eventos (o primeiro depende apenas de elos exteriores a  $Q_{n_0}$ ; o segundo, apenas de elos interiores).

Vamos dizer agora que um ponto triplo (segundo a definição no exercício acima) é um *ponto triplo especial* se seus ramos são infinitos. Note que

$$\{x(y_1, y_2, y_3) \text{ é um ponto triplo especial}\} \supset F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3).$$

De toda discussão acima, concluímos que, se  $P_p(\eta \geq 3) > 0$ , então

$$P_p(x \text{ é um ponto triplo especial}) > 0. \quad (4.12)$$

A probabilidade acima não depende de  $x$ , pela invariância por translação de  $P_p$ . Vamos denotá-la por  $\rho$ . Segue-se que

$$E_p(\#\{\text{pontos triplos especiais em } Q_{n-1}\}) = (2n - 1)^d \rho, \quad (4.13)$$

logo

$$P_p[\#(\text{pontos triplos especiais em } Q_{n-1}) \geq (2n - 1)^d \rho] > 0 \quad (4.14)$$

para todo  $n$  (pois, para toda variável aleatória integrável  $X$ ,

$$P(X \geq E(X)) > 0).$$

Por outro lado, é uma consequência do exercício acima que o número de pontos triplos especiais em  $Q_{n-1}$  é inferior a  $2d(2n-1)^{d-1}$  para toda configuração de  $\Omega$  e todo  $n$ , o que contradiz (4.14) para  $n$  suficientemente grande. Da contradição segue o resultado.

Vamos agora argumentar a afirmação no começo do parágrafo anterior. Cada ramo de cada ponto triplo especial (pte) toca um (ou mais) sítios em alguma face de  $\partial Q_n$  ( $2d(2n-1)^{d-1}$  é o total de sítios em  $\partial Q_n$ ).

Considere os componentes conexos dos pte's usando apenas elos no interior de  $Q_n$ . Digamos que cada componente contenha  $n_1, n_2, \dots$  pte's cada (isto é, o  $i$ -ésimo componente contém  $n_i$  pte's). Logo

$$n_1 + n_2 + \dots \tag{4.15}$$

dá o total de pte's em  $Q_{n-1}$ . Usando a linguagem do exercício acima, cada componente contém  $n_i$  pontos triplos. Daquele resultado sabemos que podemos achar pelo menos  $n_i + 2$  ramos distintos dentre as  $3n_i$  possibilidades. Portanto, podemos achar

$$(n_1 + 2) + (n_2 + 2) + \dots \tag{4.16}$$

ramos distintos de todos os pontos triplos. Como cada um toca pelo menos um ponto das faces de  $Q_n$ , será necessário que

$$n_1 + n_2 + \dots \leq (n_1 + 2) + (n_2 + 2) + \dots \leq 2d(2n-1)^{d-1}, \tag{4.17}$$

como queríamos mostrar.  $\triangle$

A seguir, apresentamos alguns corolários do Teorema 4.1. Lembramos que  $\tau_p(x, y)$  é a função de conectividade dos sítios  $x$  e  $y$ , isto é,

$$\tau_p(x, y) = P_p(x \leftrightarrow y).$$

#### Corolário 4.1

$$\tau_p(x, y) \geq [\theta(p)]^2 \tag{4.18}$$

O resultado acima tem como consequência que, na fase supercrítica, a função de conectividade entre dois pontos não decai quando a distância entre eles cresce.

### Prova

$$\begin{aligned}\tau_p(x, y) &\geq P_p(x \text{ e } y \text{ estão no mesmo aglomerado infinito}) \\ &= P_p(|C_x| = |C_y| = \infty) \geq P_p(|C_x| = \infty)P_p(|C_y| = \infty) = \theta(p)^2,\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade deve-se ao Teorema 4.1 e a última desigualdade é FKG.  $\triangle$

**Corolário 4.2**  $\theta(p)$  é contínua à esquerda em  $(p_c, 1]$ .

### Prova

Vamos construir modelos de percolação para todo  $p \in [0, 1]$  acoplados usando uma família de variáveis i.i.d. Uniformes em  $[0, 1]$   $\{Z_e, e \in \mathbb{E}^d\}$  declarando um elo  $e$   $p$ -aberto se  $Z_e < p$  (como na prova da monotonicidade de  $\theta(p)$ ). Seja  $C_p$  o aglomerado da origem com elos  $p$ -abertos.

Se  $\pi \leq p$  então  $C_\pi \subset C_p$  e

$$\begin{aligned}\lim_{\pi \uparrow p} \theta(\pi) &= \lim_{\pi \uparrow p} \mathbf{P}(|C_\pi| = \infty) \\ &= \mathbf{P}(\cup_{\pi < p} \{|C_\pi| = \infty\}).\end{aligned}$$

Queremos mostrar que a última probabilidade acima vale  $\theta(p)$ . Consideremos então

$$\theta(p) - \mathbf{P}(\cup_{\pi < p} \{|C_\pi| = \infty\}) = \mathbf{P}(|C_p| = \infty, |C_\pi| < \infty \forall \pi < p) \quad (4.19)$$

para  $p > p_c$ . Para concluirmos que a última expressão é nula, basta argumentarmos que se  $|C_p| = \infty$  e o aglomerado infinito  $p$ -aberto for único, então  $|C_\pi| = \infty$  para algum  $\pi < p$ .

De fato, nestas condições, tome  $\alpha$  satisfazendo  $p_c < \alpha < p$ . Então, quase certamente existe um aglomerado infinito  $\alpha$ -aberto,  $I_\alpha$ , que precisa satisfazer  $I_\alpha \subset C_p$  (pois do contrário haveria dois aglomerados infinitos de elos  $p$ -abertos!).

Logo, existe um caminho finito de elos  $p$ -abertos  $\gamma$  ligando a origem a  $I_\alpha$ . Como  $\gamma$  é finito e cada elo  $e$  nele tem  $Z_e < p$ , então

$$\mu = \max\{Z_e, e \in \gamma\} < p.$$

Se  $\pi$  for tal que  $\pi \geq \alpha$  e  $\mu < \pi < p$ , então  $I_\alpha$  e  $\gamma$  são  $\pi$ -abertos. Portanto  $|C_\pi| = \infty$ .  $\triangle$

O resultado acima, junto com o seguinte (que não é corolário da unicidade do aglomerado infinito) nos diz que  $\theta(p)$  é contínua em  $(p_c, 1]$ .

**Proposição 4.3**  $\theta(p)$  é contínua à direita.

**Prova**

Seja  $A_n$  o evento de que a origem está ligada à fronteira de  $S_n$  por um caminho aberto.  $(A_n)_{n \geq 1}$  é uma seqüência decrescente e

$$P_p(A_n) \downarrow \theta(p)$$

quando  $n \uparrow \infty$ .  $P_p(A_n)$  é contínua em  $p$  (pois é um polinômio) e, usando o modelo padrão do Capítulo 1, é fácil ver também que é crescente nesta variável. Logo,  $\theta(p)$  é o limite decrescente de funções contínuas crescentes. Um resultado de análise sobre funções semi-contínuas inferiores (ou um argumento direto) nos dá o resultado.  $\triangle$

**Observação 4.1** Como conseqüência dos dois últimos resultados, temos que  $\theta(p)$  será contínua em  $[0, 1]$  se e somente se  $\theta(p_c) = 0$ .

Para o próximo corolário, vamos dizer que ocorre um *cruzamento da esquerda para a direita* no cubo  $Q_n$  se houver um caminho de elos abertos contidos em  $Q_n$  ligando a face esquerda de  $Q_n$  a sua face direita. Denotemos por  $ED_n$  o evento de que tal cruzamento ocorre.  $ED_n$  poderia ser visto como uma versão a volume finito do evento de que há percolação. É uma decorrência do decaimento exponencial do raio de  $C$  na fase subcrítica que  $P_p(ED_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  neste caso (verifique). O caso supercrítico será tratado no próximo resultado.

**Corolário 4.3** Se  $\theta(p) > 0$ , então

$$P_p(ED_n) \rightarrow 1 \tag{4.20}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Veremos no próximo capítulo que em  $p = p_c$  um evento similar a  $ED_n$  tem probabilidade que não converge nem para 0 nem para 1 quando  $n \rightarrow \infty$ .

### Prova

Seja  $I_m$  o evento de que algum sítio de  $Q_m$  está num aglomerado infinito. Dado  $\epsilon > 0$ , escolha  $m$  grande o suficiente para que

$$P_p(I_m) > 1 - \epsilon \quad (4.21)$$

(isto é possível pela discussão nos primeiros parágrafos do capítulo).

Temos que, para  $n \geq m$

$$I_m \subset \cup_{i=1}^{2d} \{Q_m \leftrightarrow F_i \text{ em } Q_n\}, \quad (4.22)$$

onde  $F_1, \dots, F_{2d}$  são as faces de  $Q_n$ .

Logo

$$\begin{aligned} 1 - P_p(I_m) &\geq 1 - P_p\left(\cup_{i=1}^{2d} \{Q_m \leftrightarrow F_i \text{ em } Q_n\}\right) \\ &= P_p\left(\cap_{i=1}^{2d} \{Q_m \leftrightarrow F_i \text{ em } Q_n\}^c\right) \\ &\geq [1 - P_p(Q_m \leftrightarrow F \text{ em } Q_n)]^{2d}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde  $F \in \{F_1, \dots, F_{2d}\}$  e a última desigualdade segue de FKG pelo fato de que os eventos na intersecção são decrescentes e também do fato que estes eventos têm a mesma probabilidade (vide prova do Lema 5.1 na página 46).

De (4.21) e (4.23), temos que

$$P_p(Q_m \leftrightarrow F \text{ em } Q_n) \geq 1 - \epsilon^{1/2d} \quad (4.24)$$

Sejam  $F_e$  e  $F_d$  as faces esquerda e direita de  $Q_n$  respectivamente. Por FKG e (4.24),

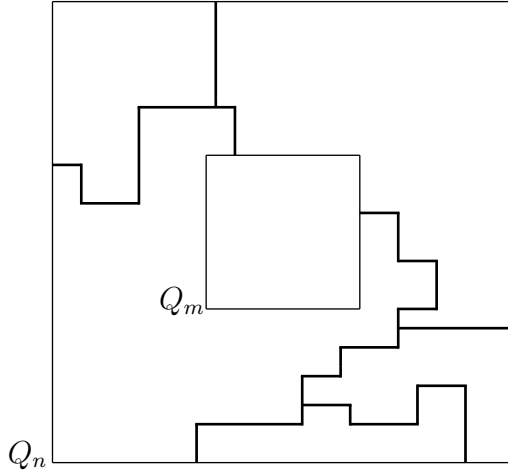
$$P_p(\{Q_m \leftrightarrow F_e \text{ em } Q_n\} \cap \{Q_m \leftrightarrow F_d \text{ em } Q_n\}) \geq (1 - \epsilon^{1/2d})^2 \quad (4.25)$$

Seja agora  $A_{m,n}$  o evento de que há 2 sítios em  $\partial Q_m$  em 2 aglomerados abertos disjuntos, ambos tocando  $\partial Q_n$ . Temos que  $A_{m,n} \subset A_{m,n+1}$  e  $A_{m,n} \downarrow A_m$  quando  $n \uparrow \infty$ , onde  $A_m$  é o evento de que há 2 aglomerados abertos infinitos disjuntos tocando  $Q_m$ .

Em conclusão

$$P_p(A_{m,n}) \rightarrow P_p(A_m) = 0 \quad (4.26)$$



Figura 4.3: O evento  $A_{m,n}$ 

quando  $n \rightarrow \infty$  e portanto, de

$$P_p(ED_n) \geq (1 - \epsilon^{1/2d})^2 - P_p(A_{m,n}), \quad (4.27)$$

que decorre de

$$\{Q_m \leftrightarrow F_e \text{ em } Q_n\} \cap \{Q_m \leftrightarrow F_d \text{ em } Q_n\} \subset ED_n \cup A_{m,n}, \quad (4.28)$$

temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_p(ED_n) \geq (1 - \epsilon^{1/2d})^2 \quad (4.29)$$

e o resultado segue de  $\epsilon$  ser arbitrário.  $\triangle$

# Capítulo 5

## O Modelo em 2 Dimensões: Dualidade

Neste capítulo e no próximo, vamos tratar do que ocorre em  $p = p_c$ . Em 2 dimensões, objeto deste capítulo, a auto-dualidade da rede  $\mathbb{Z}^2$  permite mostrar que  $p_c = 1/2$  e  $\theta(p_c) = 0$ , o que estabelece a continuidade de  $\theta(p)$  em todo o intervalo  $[0, 1]$ . Além da dualidade da rede bidimensional, outros ingredientes da prova são o decaimento exponencial da distribuição do raio de  $C$  em  $p < p_c$  (Teorema 3.1) e a unicidade do aglomerado infinito em  $\theta(p) > 0$  (Teorema 4.1).

Consideremos de novo, como na demonstração da Proposição 1.2.2 (na página 6), a rede bidimensional dual de  $\mathbb{Z}^2$ ,

$$\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + \{1/2, 1/2\}.$$

$\mathbb{Z}_*^2$  é isomorfa a  $\mathbb{Z}^2$  (por isto dizemos que  $\mathbb{Z}^2$  é auto-dual). Este fato é crucial para o que se segue. Outro fato crucial, que já usamos na demonstração da Proposição 1.2.2, é a seguinte propriedade geométrica de  $\mathbb{Z}^2$ .

**Proposição 5.1** *Seja  $G$  um subgrafo conexo finito de  $\mathbb{Z}^2$ . Existe um único circuito  $\Gamma$  de  $\mathbb{Z}_*^2$  contendo  $G$  com a propriedade de que todo elo de  $\Gamma$  cruza um elo de  $\Delta G$ , a fronteira de  $G$  (isto é, os elos de  $\mathbb{Z}^2 \setminus G$  que incidem em pelo menos um sítio de  $G$ ).*

**Teorema 5.1** *Em duas dimensões,*

$$p_c = 1/2 \quad e \quad \theta(p_c) = 0.$$

O Teorema 5.1 será provado por meio dos dois seguintes lemas.

**Lema 5.1** *Em duas dimensões,*

$$\theta(1/2) = 0.$$

**Observação 5.1** *Este resultado tem a consequência imediata que em dimensão 2*

$$p_c \geq 1/2.$$

**Lema 5.2** *Em duas dimensões,*

$$p_c \leq 1/2.$$

A heurística para a validade do primeiro lema é que, se  $\theta(1/2) > 0$ , então teremos um aglomerado infinito aberto em  $\mathbb{Z}^2$  e um aglomerado infinito fechado em  $\mathbb{Z}_*^2$ . Os dois aglomerados não podem se tocar (lembre que os elos de  $\mathbb{Z}_*^2$  têm o mesmo status que os respectivos elos secantes de  $\mathbb{Z}^2$  — vide a demonstração da Proposição 1.2.2 na página 6) e  $\mathbb{Z}^2$  é pequeno demais para isto.

Para o segundo lema, a heurística é que em  $p < p_c$ , há apenas aglomerados abertos finitos (ilhas) em  $\mathbb{Z}^2$  num mar de elos fechados do dual. Presumivelmente estes formam um aglomerado infinito. Logo,  $1 - p \geq p_c$  sempre que  $p < p_c$ , o que implica no resultado do lema.

### Prova do Lema 5.1

O argumento, não publicado, é de Y. Zhang. Usaremos o *truque da raiz quadrada* de Cox & Durrett (já usado no capítulo anterior na demonstração do Corolário 4.3): Se

$$A_1, \dots, A_m$$

forem eventos crescentes de mesma probabilidade então

$$1 - P_p(\cup_{i=1}^m A_i) = P_p(\cap_{i=1}^m A_i^c) \geq [1 - P_p(A_1)]^m,$$

onde a desigualdade é FKG. Logo

$$P_p(A_1) \geq 1 - [1 - P_p(\cup_{i=1}^m A_i)]^{1/m}.$$

Suponha que

$$\theta(1/2) > 0. \quad (5.1)$$

Seja  $A_n^e$  o evento de que algum sítio do lado esquerdo de  $T_n = [0, n]^2$  esteja num aglomerado aberto infinito de  $\mathbb{Z}^2$  sem usar outros sítios de  $T_n$ . Defina  $A_n^d$ ,  $A_n^c$  e  $A_n^b$  similarmente substituindo lado esquerdo por lado direito, lado de cima e lado de baixo, respectivamente.

Como conseqüência de (5.1)

$$P_{1/2}(\text{existir um aglomerado aberto infinito}) = 1$$

de onde concluímos que

$$P_{1/2}(A_n^e \cup A_n^d \cup A_n^c \cup A_n^b) \rightarrow 1$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Pelo truque da raiz quadrada,

$$P_{1/2}(A_n^u) \rightarrow 1 \quad (5.2)$$

quando  $n \rightarrow \infty$  para  $u = e, d, c, b$ .

Escolhamos  $N$  tal que

$$P_{1/2}(A_N^u) > 7/8 \quad \text{e} \quad P_{1/2}(A_{N-1}^u) > 7/8 \quad (5.3)$$

para  $u = e, d, c, b$ .

Na rede dual, sejam  $A_*^e(n)$  o evento de que algum sítio do lado esquerdo de  $T_n^* = [0, n-1] + (1/2, 1/2)$  esteja num aglomerado *fechado* infinito de  $\mathbb{Z}_*^2$  sem usar outros sítios de  $T_n^*$  e  $A_*^d(n)$ ,  $A_*^c(n)$  e  $A_*^b(n)$  similarmente definidos substituindo lado esquerdo por lado direito, lado de cima e lado de baixo, respectivamente.

Temos

$$P_{1/2}(A_*^u(N)) = P_{1/2}(A_{N-1}^u) > 7/8. \quad (5.4)$$

Considere

$$A = A_N^e \cap A_n^d \cap A_*^c(N) \cap A_*^b(N).$$

Note que, em  $A$ , se houver apenas um aglomerado infinito aberto em  $\mathbb{Z}^2$  e apenas um aglomerado infinito fechado em  $\mathbb{Z}_*^2$  então os caminhos abertos infinitos à esquerda e à direita de  $T_N$  devem se ligar por elos abertos por dentro de  $T_N^*$  pois por fora os caminhos infinitos fechados acima e abaixo de  $T_N^*$  bloqueiam a passagem. Similarmente, os caminhos infinitos fechados acima e abaixo de  $T_N^*$  devem se ligar por elos fechados por dentro de  $T_N$ . Mas neste caso, as ligações por dentro de  $T_N$  e  $T_N^*$  devem se cruzar, o que é impossível. Logo, em  $A$  há dois aglomerados infinitos abertos disjuntos em  $\mathbb{Z}^2$  ou dois aglomerados infinitos fechados disjuntos em  $\mathbb{Z}_*^2$  (veja a Figura 5.1). Concluimos do Teorema 4.1 que

$$P_p(A) = 0. \quad (5.5)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} P_{1/2}(A^c) &\leq P_{1/2}[(A_N^e)^c] + P_{1/2}[(A_n^d)^c] + P_{1/2}[(A_*^c(N))^c] + P_{1/2}[(A_*^b(N))^c] \\ &\leq 1/2 \end{aligned}$$

por (5.3) e (5.4). Logo,  $P_p(A) \geq 1/2$ , em contradição com (5.5), o que prova o lema.  $\triangle$

### Prova do Lema 5.2

Vamos mostrar que, se  $p < p_c$ , então existe um aglomerado fechado infinito no dual com probabilidade positiva, o que implica que  $1 - p \geq p_c$ , o que por sua vez produz o resultado do lema.

Se  $p < p_c$ , então do Corolário 3.1 temos que

$$\chi_p = \sum_{n=1}^{\infty} P_p(|C| \geq n) < \infty. \quad (5.6)$$

Seja  $M$  um inteiro positivo e

$$A_M = \{\text{Existe um caminho aberto } \pi \text{ em } \mathbb{Z}^2 \text{ ligando algum sítio da forma } (k, 0) \text{ com } k < 0 \text{ a algum outro da forma } (l, 0) \text{ com } l \geq M \text{ com a propriedade de que todos os elos de } \pi, \text{ a não ser os extremos, estão acima do eixo horizontal}\}$$

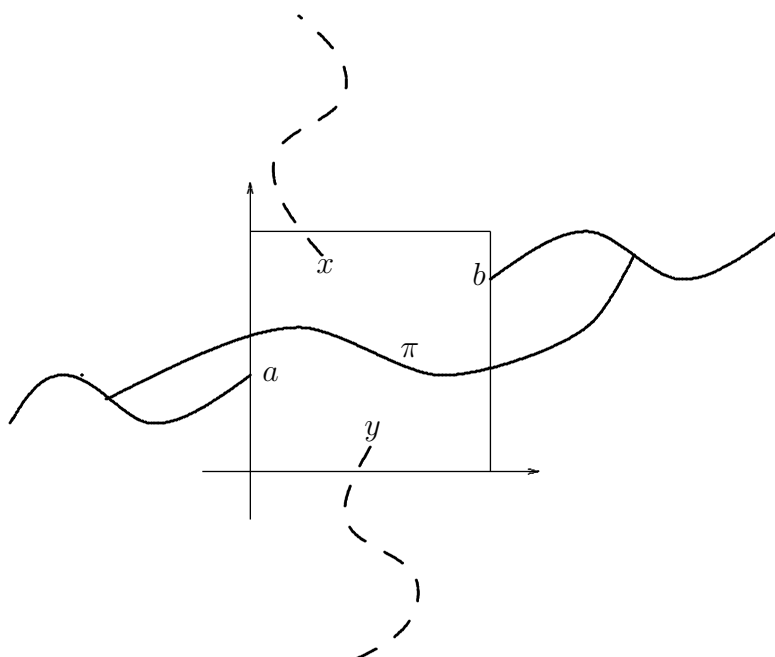


Figura 5.1: Os sítios  $a$  e  $b$  estão em aglomerados abertos infinitos de  $\mathbb{Z}^2 \setminus T_N$  e os sítios  $x$  e  $y$  estão em aglomerados fechados infinitos de  $\mathbb{Z}_*^2 \setminus T_N^*$ . Se houver um único aglomerado aberto infinito, então existe um caminho aberto  $\pi$  ligando  $a$  a  $b$ , e então os aglomerados infinitos fechados em  $x$  e  $y$  são disjuntos.

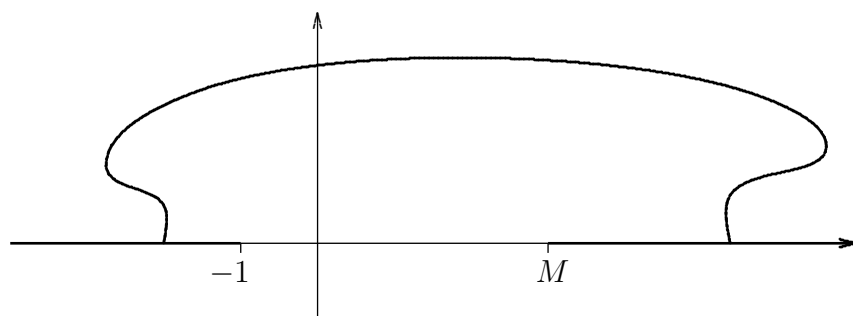


Figura 5.2: Um esboço do evento  $A_M$

Então

$$\begin{aligned}
P_p(A_M) &\leq P_p\left(\bigcup_{l=M}^{\infty} \{(k, 0) \leftrightarrow (l, 0) \text{ para algum } k < 0\}\right) \\
&\leq \sum_{l=M}^{\infty} P_p(\{(k, 0) \leftrightarrow (l, 0) \text{ para algum } k < 0\}) \\
&= \sum_{l=M}^{\infty} P_p(\{(0, 0) \leftrightarrow (k-l, 0) \text{ para algum } k < 0\}) \\
&= \sum_{l=M}^{\infty} P_p(\{(0, 0) \leftrightarrow (l+m, 0) \text{ para algum } m > 0\}) \\
&\leq \sum_{l=M}^{\infty} P_p(|C| \geq l).
\end{aligned}$$

(5.6) nos permite escolher  $M$  tal que

$$P_p(A_M) \leq 1/2. \quad (5.7)$$

Seja agora

$$L = \{(m + 1/2, 1/2) : -1 \leq m < M\}.$$

Denote por  $C(L)$  o conjunto de sítios do dual conectados a  $L$  por caminhos fechados do dual.

Se  $|C(L)| < \infty$ , então existe um circuito aberto no dual de  $\mathbb{Z}_*^2$ , isto é  $\mathbb{Z}^2$ , ao redor de  $C(L)$  (pela Proposição 5.1). Logo deve haver um caminho aberto em  $\mathbb{Z}^2$  ligando sítios do tipo  $(k, 0)$  com  $k < 0$  e  $(l, 0)$  com  $l \geq M$  inteiramente no semiplano superior. Então

$$P_p(|C(L)| < \infty) \leq P_p(A_M) \leq 1/2. \quad (5.8)$$

Portanto  $P_p(|C(L)| = \infty) \geq 1/2$ . Mas então pelo menos um sítio de  $L$  tem que estar num aglomerado fechado infinito. De onde se conclui que

$$\begin{aligned}
P_p(0_* \text{ está num aglomerado fechado infinito}) &\geq \frac{1}{M+1} P_p(|C(L)| = \infty) \\
&\geq \frac{1}{2(M+1)}
\end{aligned}$$

e o lema está provado.  $\triangle$

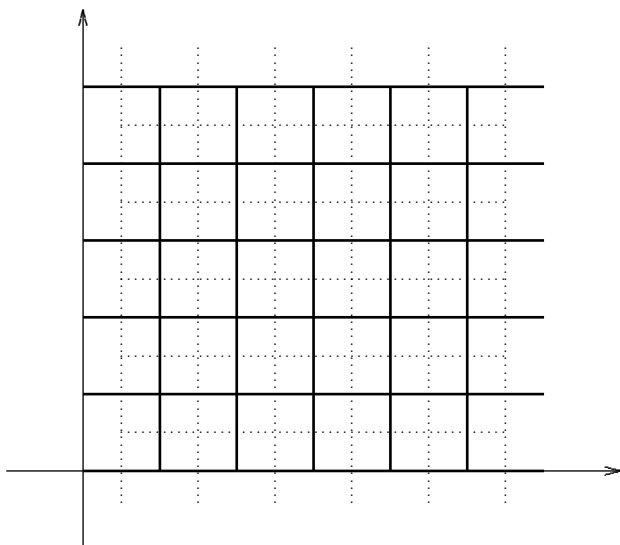


Figura 5.3:  $S_5$  e seu dual  $S_5^*$

A seguir apresentaremos uma outra prova do mesmo lema que tem um interessante subproduto.

**Outra prova do Lema 5.2**

Considere os seguintes conjuntos de sítios

$$\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x_1 \leq n + 1, 0 \leq x_2 \leq n\}$$

$$\Lambda_n^* = \{x + (1/2, 1/2), x \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x_1 \leq n, -1 \leq x_2 \leq n\},$$

os subgrafos

$$S_n = \Lambda_n \cup \{ \text{elos vizinhos mais próximos de } \Lambda_n \text{ exceto } (x, y) \text{ com } x_1 = y_1 = 0 \text{ ou } x_1 = y_1 = n + 1 \}$$

$$S_n^* = \Lambda_n^* \cup \{ \text{elos vizinhos mais próximos de } \Lambda_n^* \text{ exceto } (x, y) \text{ com } x_2 = y_2 = -1 \text{ ou } x_2 = y_2 = n \}$$

e os eventos  $A_n$  de que existe um caminho aberto em  $S_n$  ligando seu lado esquerdo a seu lado direito e  $A_n^*$  de que existe um caminho fechado em  $S_n^*$  ligando seu lado de baixo a seu lado de cima.

Temos que

$$A_n \cap A_n^* = \emptyset \tag{5.9}$$



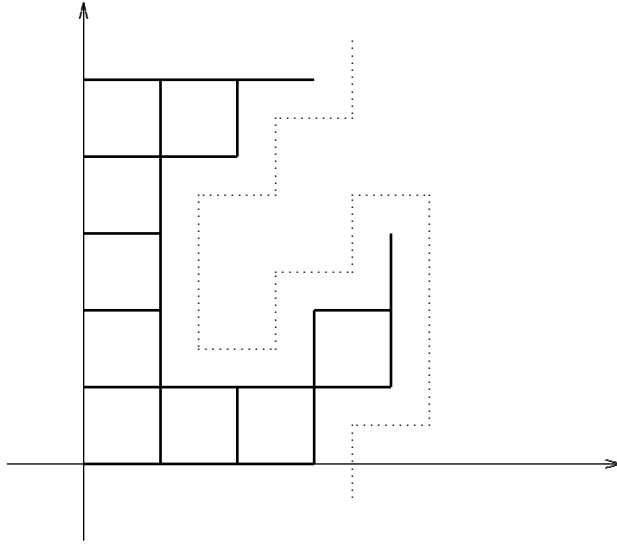


Figura 5.4: Ilustração do fato de que se não há caminhos abertos atravessando  $S_n$  da esquerda para a direita, então há um caminho fechado cruzando  $S_n^*$  de cima para baixo.

pois senão haveria um cruzamento entre caminho aberto em  $S_n$  com caminho fechado de  $S_n^*$ , o que é impossível.

Por outro lado

$$A_n \cup A_n^* = \Omega. \quad (5.10)$$

De fato, suponha que  $A_n$  não ocorre. Seja  $D$  o conjunto de sítios de  $S_n$  alcançados da face esquerda junto com os elos ligando tais sítios. Por uma variante da Proposição 5.1, existe um caminho em  $\mathbb{Z}_*^2$  cruzando  $S_n^*$  de cima para baixo secante apenas a elos de  $S_n$  contidos na fronteira de  $D$ . Logo este caminho será fechado e  $A_n^*$  ocorre (veja Figura 5.4).

De (5.9) e (5.10)

$$P_p(A_n) + P_p(A_n^*) = 1. \quad (5.11)$$

Mas  $P_p(A_n^*) = P_{1-p}(A_n)$ . Logo

$$P_{1/2}(A_n) = 1/2 \quad (5.12)$$

(para todo  $n$ ).

Mas se  $p_c > 1/2$ , então  $P_{1/2}(A_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  (por uma variante do argumento que diz que  $P_p(ED_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  se  $p < p_c$  mencionado no capítulo anterior).

A contradição prova o lema.  $\triangle$

O subproduto interessante desta prova a que se aludiu acima é o fato de que  $P_{1/2}(A_n) = 1/2$  independentemente de  $n$ . Pode-se argumentar (faça-o) como para  $ED_n$  que

$$P_p(A_n) \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad 1$$

quando  $n \rightarrow \infty$  conforme  $p < p_c$  ou  $p > p_c$  respectivamente.



## Capítulo 6

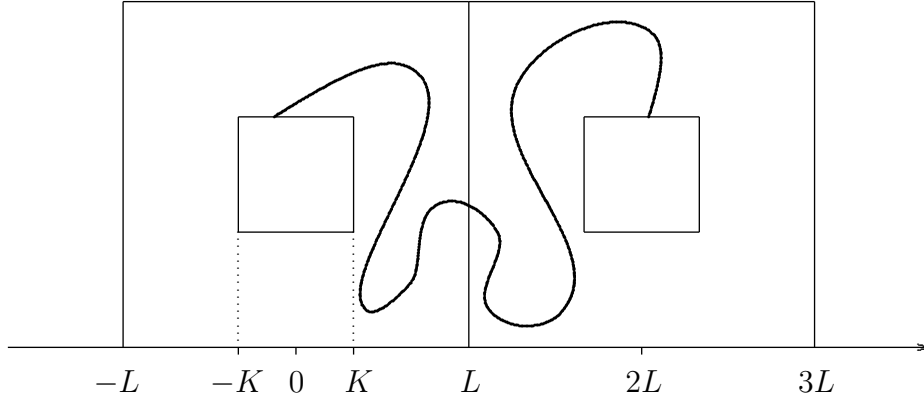
# Continuidade no Ponto Crítico: Renormalização

Neste último capítulo trataremos de forma pincelada de um método de ataque ao problema de se provar a continuidade de  $\theta(p)$  em  $p_c$  em mais dimensões do que duas. Neste caso, não temos nem a auto-dualidade da rede hipercúbica nem conhecemos (ou esperamos algum dia conhecer) o valor exato de  $p_c$ . Ambos conhecimentos foram úteis em  $d = 2$  (Capítulo 5).

A idéia será relacionar a ocorrência de percolação a um evento *em volume finito*, cuja probabilidade, sendo contínua (pois as probabilidades de todos tais eventos são polinômios em  $p$ ), nos permitirá concluir que, se há percolação para  $p$ , então há também para  $p - \epsilon$  com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno.

O método é chamado de *renormalização*. A versão a ser esboçada, que chamaremos renormalização *estática*, não foi ainda realizada com rigor em modelos de percolação (uma prova para a Proposição 6.2 abaixo ainda não foi feita), mas técnicas de renormalização *dinâmica* muito similares foram aplicadas com sucesso para percolação em semi-espacos de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$  [7]. O problema da continuidade no ponto crítico em  $\mathbb{Z}^d$  inteiro permanece aberto para valores intermediários de  $d$  entre 2 e  $d_0$ , este último o menor valor para o qual Hara e Slade [17] podem aplicar sua *expansão em laços* e obter a continuidade a partir daí, entre outros resultados ( $d_0$  estava em 19 segundo as últimas notícias, mas não se espera que possa vir abaixo de 7).

Para  $0 \leq K \leq L$ , considere a partição de  $\mathbb{Z}^d$  em cubos concêntricos de lado  $2K$  e  $2L$  como na figura abaixo e seja  $A_{K,L}$  o evento de que existe um caminho aberto dentro dos dois cubos grandes conectando a superfície dos

Figura 6.1: O evento  $A_{K,L}$ 

dois cubos menores (vide Figura 6.1).

Para garantir interconexão, precisamos intersectar  $A_{K,L}$  com outro evento

$$B_{K,L} = B_{K,L}^1 \cap B_{K,L}^2,$$

em que  $B_{K,L}^i$ ,  $i = 1, 2$ , é o evento de que todos os sítios do cubo menor  $i$ , que estiverem ligados por caminhos abertos à fronteira do cubo grande respectivo, estarão conectados entre si por caminhos abertos dentro do cubo grande.

Seja  $\tilde{A}_{K,L} = A_{K,L} \cap B_{K,L}$ .

**Proposição 6.1** *Seja  $R_{K,L} = P_p(\tilde{A}_{K,L})$ . Existe  $\lambda^* \in (0, 1)$  tal que se (para algum  $0 \leq K \leq L$  e  $0 < p < 1$ )  $R_{K,L}(p) > \lambda^*$ , então  $\theta(p) > 0$ .*

Um argumento para a validade deste resultado será esboçado adiante.

**Proposição 6.2 (Conjectura)** *Se, para algum  $p' \in (0, 1)$ ,  $\theta(p') > 0$ , então*

$$\sup_K \liminf_{L \rightarrow \infty} P_{p'}(A_{K,L}) = 1. \quad (6.1)$$

**Teorema 6.1** *Se a Proposição 6.2 conjecturada for verdadeira, então*

$$\theta(p_c) = 0.$$

**Prova do teorema.**

Primeiro mostraremos que a Proposição 6.2 conjecturada implica que se  $\theta(p') > 0$ , então

$$\sup_K \liminf_{L \rightarrow \infty} R_{K,L}(p') = 1 \quad (6.2)$$

(portanto  $R_{K,L}(p') > \lambda^*$  para algum  $K$  e  $L$ ).

De fato, para cada  $K$  fixo,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{p'}(B_{K,L}^i) = 1$$

para  $i = 1, 2$ , pois de outra forma haveria probabilidade positiva de que 2 sítios do cubo menor estivessem em aglomerados infinitos disjuntos. Logo

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{p'}(B_{K,L}) = 1$$

do que se conclui que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{p'}(\tilde{A}_{K,L}) = \lim_{L \rightarrow \infty} P_{p'}(A_{K,L}) = 1.$$

Agora suponha que, para algum  $p'$ ,  $\theta(p') > 0$ . Pelo argumento acima podemos escolher  $K_0$  e  $L_0$  tais que  $R_{K_0,L_0}(p') > \lambda^*$ . Mas  $R_{K_0,L_0}(p)$  é um polinômio em  $p$ . Logo

$$R_{K_0,L_0}(p' - \epsilon) > \lambda^*$$

para algum  $\epsilon$  positivo. Pela Proposição 6.1

$$\theta(p' - \epsilon) > 0.$$

Temos portanto que  $\theta(p') > 0$  implica que  $\theta(p' - \epsilon) > 0$  para algum  $\epsilon > 0$ . Logo  $\theta(p_c)$  não pode ser positivo, pois isto implicaria em  $\theta(p)$  positivo para algum  $p < p_c$ , o que contradiz a definição de  $p_c$ .  $\triangle$

**(Esboço de) Prova da Proposição 6.1 (em  $d = 3$ ).**

Considere uma rede *renormalizada* isomórfica a  $\mathbb{Z}^2$  na qual cada sítio corresponde a um cubo  $2L \times 2L \times 2L$  em  $\mathbb{Z}^3$ , como na Figura 6.2. Declare um elo *renormalizado* aberto se  $\tilde{A}_{K,L}(e)$  ocorrer.

Teremos então um modelo de percolação *dependente* na rede renormalizada com uma medida de probabilidade  $\tilde{P}_p$  tal que

$$\tilde{P}_p(e \text{ está aberto}) = R_{K,L}.$$

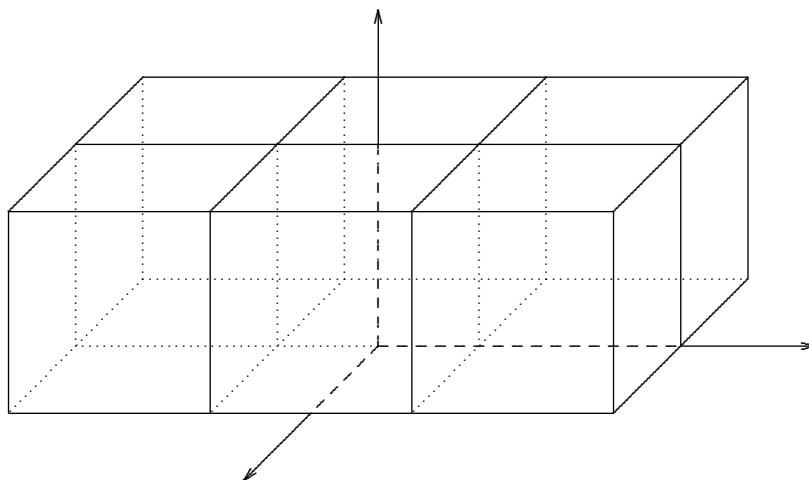


Figura 6.2: Parte da rede  $\mathbb{Z}^2$  renormalizada.

Precisamos mostrar que existe  $\lambda^* \in (0, 1)$  tal que se  $R_{K,L}$  for maior do que  $\lambda^*$ , então percolação dependente ocorre na rede renormalizada. Se isto ocorrer, obviamente percolação independente ocorrerá na rede original.

A prova de que percolação dependente ocorre em  $\mathbb{Z}^2$  renormalizada pode ser feita pelo mesmo argumento de Peierls na prova da Proposição 1.2.2 (a partir dos circuitos nos elos duais de  $\mathbb{Z}^2$ ) com a única pequena modificação de que a medida nos elos não é mais independente, mas apenas *localmente* dependente. Deixamos os detalhes para o leitor.  $\triangle$

# Apêndice A

## Prova a um lema do Capítulo 3

Neste apêndice, provaremos o Lema 3.3 a partir de (3.8). Isto é, queremos mostrar que para  $p < p_c$ , existe uma constante  $\delta(p)$  tal que

$$g_p(n) \leq \delta(p)n^{-1/2} \quad (\text{A.1})$$

a partir de

$$g_\alpha(n) \leq g_\beta(n) \exp \left[ (\beta - \alpha) - (\beta - \alpha) \frac{n}{\sum_{i=0}^n g_\beta(i)} \right], \quad (\text{A.2})$$

para  $0 \leq \alpha \leq \beta < p_c$ . Além de (A.2), os únicos fatos requeridos pelo argumento são

$$0 < g_p(n) < 1 \text{ para todo } n \text{ e } p \in [0, p_c), \quad (\text{A.3})$$

$$g_p(n) \text{ é não-decrescente em } p \text{ para todo } p \in [0, p_c), \quad (\text{A.4})$$

$$g_p(n) \text{ é não-crescente em } n \text{ para todo } p \in [0, p_c) \text{ e} \quad (\text{A.5})$$

$$g_p(n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e } p \in [0, p_c). \quad (\text{A.6})$$

### Prova de (A.1)

Reproduzimos o argumento em [8]. Vamos primeiro escolher uma subsequência  $n_1, n_2, \dots$  ao longo da qual  $g_p(n)$  converge a 0 bastante rápido. A seguir, fechamos as lacunas.

Fixemos  $\beta < p_c$  e um inteiro positivo  $n$ . Sejam  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha < \beta$  e  $n' \geq n$ . Adiante escolheremos  $\alpha$  e  $n'$  explicitamente em termos de  $\beta$ .



De (A.2),

$$\begin{aligned} g_\alpha(n') &\leq g_\beta(n') \exp\left(1 - \frac{n'(\beta - \alpha)}{\sum_{i=0}^{n'} g_\beta(i)}\right) \\ &\leq g_\beta(n) \exp\left(1 - \frac{n'(\beta - \alpha)}{\sum_{i=0}^{n'} g_\beta(i)}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

pois  $n \leq n'$ . Queremos escrever o expoente em termos de  $g_\beta(n)$  e para isto escolheremos  $n'$  apropriadamente. Vamos quebrar a soma em duas partes, para  $i < n$  e  $i \geq n$ . Usando (A.5), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n'} \sum_{i=0}^{n'} g_\beta(i) &\leq \frac{1}{n'} \{n g_\beta(0) + n' g_\beta(n)\} \\ &\leq 3g_\beta(n) \end{aligned}$$

se  $n' \geq n \lfloor g_\beta(n)^{-1} \rfloor$ . Vamos definir agora

$$n' = n \gamma_\beta(n) \quad (\text{A.8})$$

onde  $\gamma_\beta(n) = \lfloor g_\beta(n)^{-1} \rfloor$  e deduzir de (A.7) que

$$g_\alpha(n') \leq g_\beta(n) \exp\left(1 - \frac{\beta - \alpha}{3g_\beta(n)}\right). \quad (\text{A.9})$$

Escolhemos a seguir  $\alpha$  fazendo

$$\beta - \alpha = 3g_\beta(n) \{1 - \log g_\beta(n)\}. \quad (\text{A.10})$$

De (A.6) temos  $0 < \alpha < \beta$  se  $n$  for escolhido bastante grande.

De (A.9) temos

$$g_\alpha(n') \leq g_\beta(n)^2. \quad (\text{A.11})$$

Usaremos esta conclusão recursivamente a seguir. Mostramos até agora que, para  $\beta < p_c$  existe  $n_0(\beta)$  tal que (A.11) vale sempre que  $n \geq n_0(\beta)$  e  $\alpha$  e  $n'$  forem dados por (A.10) e (A.8) respectivamente.

Fixemos agora  $p < p_c$  e escolhamos  $\pi$  tal que  $p < \pi < p_c$ . Construímos agora seqüências  $(p_i, i \geq 0)$  de probabilidades e  $(n_i, i \geq 0)$  de inteiros. Façamos  $p_0 = \pi$  e deixemos  $n_0$  para mais tarde. Tendo encontrado  $p_0, p_1, \dots, p_i$  e  $n_0, n_1, \dots, n_i$ , definimos

$$n_{i+1} = n_i \gamma_i \quad \text{e} \quad p_i - p_{i+1} = 3g_i(1 - \log g_i) \quad (\text{A.12})$$

onde  $g_i = g_{p_i}(n_i)$  e  $\gamma_i = \lfloor g_i^{-1} \rfloor$ . Note que  $n_i \leq n_{i+1}$  e  $p_i > p_{i+1}$ .

A recursão em (A.12) é válida enquanto  $p_{i+1} > 0$  e este será o caso se  $n_0$  for escolhido suficientemente grande. Para ver isto, argumentamos da seguinte forma. Da definição de  $p_0, \dots, p_i$  e  $n_0, \dots, n_i$  e da discussão que levou a (A.11) temos

$$g_{j+1} \leq g_j^2 \quad (\text{A.13})$$

para  $j = 0, 1, \dots, i-1$ . Se uma seqüência de números reais  $(x_j, j \geq 0)$  satisfizer  $0 < x_0 < 1$ ,  $x_{j+1} = x_j^2$  para  $j \geq 0$ , então é fácil de ver que

$$s(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} 3x_j(1 - \log x_j) < \infty$$

e que  $s(x_0) \rightarrow 0$  quando  $x_0 \rightarrow 0$ . Podemos então tomar  $x_0$  pequeno o suficiente para que

$$s(x_0) \leq \pi - p \quad (\text{A.14})$$

e depois tomar  $n_0$  grande o suficiente para que  $g_0 = g_\pi(n_0) < x_0$ . Agora  $h(x) = 3x(1 - \log x)$  é uma função crescente em  $[0, x_0]$ , o que junto com (A.12) e (A.13) implica

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - 3g_i(1 - \log g_i) \\ &= \pi - \sum_{j=0}^i 3g_j(1 - \log g_j) \\ &\geq \pi - \sum_{j=0}^i 3x_j(1 - \log x_j) \\ &\geq p \end{aligned}$$

por (A.14).

Desta forma, escolhendo  $n_0$  convenientemente, teremos  $p_{i+1} > 0$  para todo  $i$  e também

$$\tilde{p} = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$$

satisfazendo  $\tilde{p} \geq p$ . Vamos supor que  $n_0$  foi escolhido da forma adequada. Temos então a recursão (A.12) válida e  $\tilde{p} \geq p$ . De (A.12) e (A.13) temos

$$n_k = n_0 \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{k-1}$$

para  $k \geq 1$  e

$$\begin{aligned}
 g_{k-1}^2 &= g_{k-1}g_{k-1} \\
 &\leq g_{k-1}g_{k-2}^2 \leq \cdots \\
 &\leq g_{k-1}g_{k-2} \cdots g_1g_0^2 \\
 &\leq (\gamma_{k-1}\gamma_{k-2} \cdots \gamma_0)^{-1}g_0 \\
 &= \delta^2n_k^{-1},
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

onde  $\delta = n_0g_0$ .

O argumento está basicamente terminado. Seja  $n > n_0$ . Seja  $k$  um inteiro tal que  $n_{k-1} \leq n < n_k$ , o que é possível pois  $g_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  e logo  $n_{k-1} < n_k$  para todo  $k$  bastante grande. Então

$$\begin{aligned}
 g_p(n) &\leq g_{p_{k-1}}(n_{k-1}) \quad \text{pois } p \leq p_{k-1} \\
 &= g_{k-1} \\
 &\leq \delta n_k^{-1/2} \quad \text{por (A.15)} \\
 &\leq \delta n^{-1/2} \quad \text{pois } n < n_k
 \end{aligned}$$

como queríamos. Isto vale para  $n > n_0$ . Ajustando a constante, temos a desigualdade para todo  $n$ .  $\triangle$

# Referências Bibliográficas

- [1] Broadbent, S.R. e Hammersley, J.M., Percolation processes I. Crystals and mazes, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **53** 629-641 (1957)
- [2] Harris, T., A lower bound for the critical probability in a certain percolation process, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **56**, 13-20 (1960)
- [3] Kesten, H., The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $\frac{1}{2}$ , *Communications in Mathematical Physics* **74**, 41-59 (1980)
- [4] Menshikov, M.V., Coincidence of critical points in percolation problems, *Soviet Mathematics Doklady* **33**, 856-859 (1986)
- [5] Aizenman, M. e Barsky, D., Sharpness of the phase transition in percolation models, *Communications in Mathematical Physics* **108**, 489-526 (1987)
- [6] Aizenman, M., Kesten, H. e Newman, C.M., Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short- and long-range percolation, *Communications in Mathematical Physics* **111**, 505-532 (1987)
- [7] Barsky, D., Grimmett, G. e Newman, C.M., Percolation in half-spaces: Equality of critical densities and continuity of the percolation probability, *Probability Theory and Related Fields* **90**, 111-148 (1991)
- [8] Grimmett, G.R., *Percolation*, Springer (1989)
- [9] Breiman, L., *Probability*, Addison-Wesley (1968)

- [10] Kesten, H., *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhäuser (1982)
- [11] Kesten, H., Asymptotics in high dimensions for percolation, *Disorder in physical systems*, 219–240, Oxford University Press (1990)
- [12] Fortuin, C.M., Kasteleyn, P.W., e Ginibre, J., Correlation inequalities on some partially ordered sets, *Communications in Mathematical Physics* **22**, 89-103 (1971)
- [13] van den Berg, J. e Kesten, H., Inequalities with applications to percolation and reliability, *Journal of Applied Probability* **22**, 556-569 (1985)
- [14] Russo, L., On the critical percolation probabilities, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **56**, 229-237 (1981)
- [15] Newman, C.M. e Schulman, L.S., Infinite clusters in percolation models, *Journal of Statistical Physics* **26**, 613–628 (1981)
- [16] Burton, R.M. e Keane, M., Density and uniqueness in percolation, *Communications in Mathematical Physics* **121**, 501-505 (1989)
- [17] Hara, T. e Slade, G., Mean-field critical behavior for percolation in high dimensions, *Communications in Mathematical Physics* **128**, 333-391 (1990)